



**FCTUC DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL**  
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

# **Avaliação Teórica do Comportamento à Torção de Lajes de Betão Armado**

Dissertação apresentada para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil na Especialidade de Estruturas

**Autor**

**James Silva Ramos**

**Orientador**

**Professor Doutor Sérgio Manuel Rodrigues Lopes**

**Orientador**

**Professor Doutor Ricardo Nuno Francisco do Carmo**

Esta dissertação é da exclusiva responsabilidade do seu autor, não tendo sofrido correcções após a defesa em provas públicas. O Departamento de Engenharia Civil da FCTUC declina qualquer responsabilidade pelo uso da informação apresentada
--

**Coimbra, Julho 2013**

## AGRADECIMENTOS

Chegado o momento em que finalizo uma etapa importante da minha existência, profunda é a minha gratidão por tudo e por todos que me proporcionaram esta oportunidade.

Aos meus orientadores, Professor Doutor Sérgio Lopes e Professor Doutor Ricardo do Carmo, os meus sinceros agradecimentos, pelo conhecimento e experiência transmitidos ao longo da orientação científica desta tese.

Ao Professor Doutor Adelino Vasconcelos Lopes queria demonstrar a minha profunda e eterna gratidão por tudo o que me ensinou, pela experiência transmitida e pelo auxílio sempre prestado perante as várias dificuldades que enfrentei. Por todo o incentivo dado, pelo rigor imposto e pela filosofia de trabalho ensinada, estou ciente que continuarei a trilhar o compensatório caminho da busca do conhecimento e da evolução pessoal e profissional.

Agradeço aos meus fiéis Amigos e à minha Namorada que sempre foram o meu porto seguro aquando das tempestades da vida. Aos meus colegas, que juntos carregámos o fardo do sacrifício em troca do saber, um muito obrigado. Ainda uma palavra de apreço a todos os Professores que deixaram a sua marca indelével na minha formação.

Em último, contudo mais importante, agradeço aos meus familiares, especialmente aos meus Pais e aos meus Avós por tudo o que me ensinaram sobre a vida e sobre o mundo, sobretudo pelo amor demonstrado, que me fez quem hoje sou. Sem eles, esta etapa da vida, que agora concluo, seria apenas um sonho aprisionado nos recônditos cantos da minha mente.

## RESUMO

Neste trabalho é feita uma avaliação teórica do comportamento à torção de lajes de Betão Armado (BA). Em virtude dos resultados obtidos em ensaios experimentais, sabe-se que a curva que define a resistência à torção de lajes de BA é constituída por três fases distintas: A fase linear elástica, não fissurada; a fase não linear, de desenvolvimento de fissuras até se atingir a cedência e por último, a fase de plastificação das armaduras até se atingir a rotura no ponto de carga máxima. Um aspecto relevante para a análise da curva momento torsor-rotação unitária  $T-\theta$ , é a diminuição acentuada da rigidez ao se passar da fase inicial para a segunda fase.

Assim, a avaliação consiste na análise de resultados experimentais, de lajes quadradas ensaiadas à torção pura, e na análise de resultados obtidos com modelos numéricos, recorrendo a dois programas computacionais distintos.

Com o objectivo de caracterizar o comportamento genérico de lajes de BA sujeitas à torção, são feitos testes paramétricos, a nível numérico, relativos à geometria, às características do betão e às características do aço, constituintes das lajes. Os resultados obtidos são confrontados com os experimentais a fim de se chegar a relações que permitam a caracterização de cada uma das fases da curva do comportamento. Por um lado, são propostos parâmetros adimensionais, designados de momentos torsores reduzidos, que reúnem as relações paramétricas e facilitam a obtenção dos momentos torsores nos pontos característicos das curvas. Por outro lado, são propostas equações simples para a obtenção da rotação unitária nos mesmos pontos. Assim se define a pretendida curva genérica do comportamento. É verificada a aplicabilidade e a fiabilidade dos resultados ao serem confrontados com os exemplos experimentais disponíveis.

Os resultados obtidos são analisados e discutidos. Apresentam-se também as principais conclusões a que se chegaram bem como as sugestões para a continuação do desenvolvimento deste tema no futuro.

## Palavras-chave

Torção / lajes de betão armado / momento torsor reduzido/ curva genérica de comportamento/ testes paramétricos /

---

## ABSTRACT

This work comprises a theoretical evaluation of the torsion behaviour of Reinforced Concrete (RC) Slabs. Experimental tests have shown that the curve that defines the resistance to torsion of RC slabs is composed by three different stages: the elastic non-cracked linear stage; the linear cracked stage, characterized by the development of cracks until yielding of steel is reached and, finally, the stage of the steel plastification until rupture is reached at the maximum load value. A relevant aspect concerning the T- $\theta$  rotation-torque curve is the clear reduction of stiffness at the transition point from the initial phase to the second stage.

Thus, the evaluation consists on an analysis of the experimental results regarding square slabs tested under pure torsion, and of a further analysis of the results obtained with numeric models by using two distinct computing programs.

Aiming at characterizing the generic behaviour of concrete slabs subject to torsion, parametric tests are carried out at the numeric level regarding the geometry and characteristics of the type of concrete and steel that the slabs are made of. The results obtained are compared to the experimental results in order to find the relations that best reflect each of the stages of the behaviour curve. Non-dimensional parameters, herein termed reduced torque, are proposed to gather the parametric relationships that would lead to the generic wanted curve. The rotation value can be obtained from simple equations also proposed. The applicability and reliability of the reduced moment are checked when these are applied to the available experimental examples.

The results are analyzed and discussed. The main conclusions as well as the suggestions to continue the development of this topic in the future are also presented.

### Key-words

Torsion / reinforced concrete slabs / reduced twisting moment / generic curve / behaviour curve / parametric tests /

---

## ÍNDICE

AGRADECIMENTOS .....	i
RESUMO .....	ii
ABSTRACT .....	iii
ÍNDICE.....	iv
ÍNDICE DE FIGURAS .....	vi
ÍNDICE DE TABELAS .....	vii
SIMBOLOGIA .....	vii
ABREVIATURAS .....	ix
1 INTRODUÇÃO.....	1
1.1 Objectivos .....	2
1.2 Estrutura do documento .....	2
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	4
2.1 Torção .....	5
2.1.1 Torção em Vigas.....	6
2.1.2 Torção em Lajes .....	7
3 PROGRAMAS E EXEMPLOS BASE .....	11
3.1 Programa SAP 2000.....	11
3.2 Programa ANL_Grelhas .....	12
3.2.1 Momento-Curvatura .....	13
3.2.2 Algoritmo incremental de carga .....	13
3.3 Exemplos .....	16

---

3.3.1	Lajes PF .....	17
3.3.2	Lajes M .....	18
3.3.3	Lajes Old e New .....	19
3.3.4	Lajes ML .....	20
4	PONTO DE FISSURAÇÃO.....	22
4.1	Rigidez elástica .....	22
4.2	Ponto de fissuração .....	24
4.2.1	Parâmetro b .....	25
4.2.2	Extensão média de fissuração.....	30
4.2.3	Parâmetro h.....	34
4.3	Momento reduzido de fissuração .....	38
5	PONTO DE CEDÊNCIA .....	42
5.1	Ajuste das curvas .....	43
5.1.1	Ponto de Fissuração .....	43
5.1.2	Ponto de cedência .....	44
5.2	Curvas Teóricas ANL .....	46
5.3	Momento reduzido de cedência .....	49
5.4	Rotação unitária de cedência .....	51
5.5	Ponto de carga máxima.....	52
6	CONCLUSÃO.....	54
6.1	Principais conclusões .....	54
6.2	Trabalhos Futuros e Recomendações.....	55
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	57

---

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1- Curva carga-deslocamento de um elemento de BA (Beeby & Nayaranan, 2005).	4
Figura 2.2 - Diagrama Torção-rotação, (Leonhardt & Mönig, 1979) .....	6
Figura 3.1- Curva Torção-Rotação de uma Viga de BA, (Bernardo, 2003).....	14
Figura 3.2- Curva Torção-Rotação, (Pontes, 2009).....	15
Figura 3.3- Curva Torção-Rotação, (Rodrigues, 2011).....	15
Figura 3.4 - Dimensões e pontos de apoio/carga das lajes, adaptado de (Menoita, 2010). ....	16
Figura 4.1- Rotação de torção dum elemento de viga. ....	25
Figura 4.2 - Curva experimental $P-d$ .....	26
Figura 4.3 – Ajuste da curva teórica à curva experimental no ponto de fissuração, $b=0,35m$ .	28
Figura 4.4 – Ajuste da curva teórica à curva experimental no ponto de fissuração, $b=0,30m$ .	28
Figura 4.5 – Variação do momento de fissuração relativamente ao parâmetro $b$ . ....	29
Figura 4.6 – Variação da rotação unitária de fissuração relativamente ao parâmetro $b$ .....	30
Figura 4.7 – Modelo e campo de tensões máximas num exemplo SAP 2000 de laje. ....	32
Figura 4.8 – Valores das tensões e das extensões experimentais no ponto de fissuração. ....	33
Figura 4.9 – Variação do momento de fissuração $T_{cr}$ com a altura $h$ . ....	36
Figura 4.10 – Variação da rotação unitária $\theta_{cr}$ com a altura $h$ . ....	37
Figura 4.11 – Valores do momento reduzido de fissuração $\mu_{Tcr}$ , em função de $f_{ctm}$ .....	40
Figura 4.12 - Diagrama $P-d$ experimental da Laje Old3, (Rodrigues, 2011). ....	41
Figura 5.1 - Curva experimental $P-d$ da Laje ML2. ....	45
Figura 5.2 - Curva experimental $P-d$ da Laje ML3. ....	45
Figura 5.3 - Curva experimental $P-d$ e curva teórica ANL, da Laje ML2 .....	47
Figura 5.4 - Curva experimental $P-d$ e curva teórica ANL, da Laje ML3 .....	47
Figura 5.5 - Curva experimental $P-d$ e curva teórica ANL, da Laje ML6 .....	48
Figura 5.6 - Curva experimental $P-d$ e curva teórica ANL, da Laje ML9.....	48

---

## ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 3.1 - Dimensões e Resistência do betão à compressão das Lajes PF. ....	17
Tabela 3.2 - Características do Aço das Lajes PF. ....	18
Tabela 3.3 - Dimensões e Resistência do betão à compressão das Lajes M. ....	18
Tabela 3.4 - Características do Aço das Lajes M. ....	19
Tabela 3.5 - Dimensões e Resistência do betão à compressão das Lajes Old e New.....	19
Tabela 3.6- Características do Aço das Lajes Old e New .....	20
Tabela 3.7 - Dimensões e Resistência do betão à compressão das Lajes ML.....	20
Tabela 3.8 - Características do Aço das Lajes ML.....	21
Tabela 4.1 – Valores da rigidez elástica das lajes de BA. ....	23
Tabela 4.2 – Valor dos esforços e das deformações para a Laje New3. ....	27
Tabela 4.3 – Tensões e extensões máximas elementares nos pontos de fissuração. ....	32
Tabela 4.4 – Cargas e deslocamentos de fissuração em função do parâmetro $h$ .....	35
Tabela 4.5 – Valores representativos do ajuste da curva teórica ANL.....	36
Tabela 4.6 – Valores do momento reduzido de fissuração.....	39
Tabela 5.1 – Cargas e flechas no ponto de fissuração das Lajes ML2, ML3, ML6 e ML9. ...	43
Tabela 5.2 – Cargas e flechas no ponto de cedência das Lajes ML2, ML3, ML6 e ML9. ....	46
Tabela 5.3 – Momentos e rotações no ponto de cedência. ....	50
Tabela 5.4 – Rotação unitária de cedência .....	51
Tabela 5.5 – Momento torsor de cedência e momento torsor máximo. ....	52
Tabela 5.6 – Rotação unitária de cedência e rotação unitária máxima.....	53



## SIMBOLOGIA

### Letras maiúsculas latinas

$A_s$  – Área de aço da armadura de um elemento;

$A_{s,varão}$  - Área da secção transversal de um varão de aço;

$E_{cm}$  – Valor médio do módulo de elasticidade do betão;

$K_I$  – Rigidez elástica de um elemento;

$L$  – Comprimento de um elemento;

$M$  – Momento flector actuante;

$P$  – Carga actuante;

$P_{cr}$  – Carga actuante de fissuração;

$P_y$  – Carga actuante de cedência das armaduras;

$P_{max}$  – Carga máxima actuante;

$T$  – Momento torsor;

$T_{cr}$  – Momento torsor de fissuração;

$T_y$  – Momento torsor de cedência das armaduras;

$T_{max}$  – Momento torsor máximo

### Letras minúsculas latinas

$b$  – largura de uma secção;

$b'$  – distância entre pontos de apoio das lajes;

$d$  – deslocamento devido a uma carga actuante;

$d_{cr}$  – deslocamento devido à carga de fissuração;

$d_y$  – deslocamento devido à carga de cedência das armaduras;

$d_{max}$  – deslocamento devido à carga máxima actuante;

$f_{cm}, f_c$  – valor médio da rotura do betão à compressão;

$f_{ctm}, f_r$  – valor médio da tensão de rotura do betão à tracção;

$f_{sy}, f_y$  – valor da tensão de cedência do aço;

$h$  – altura de uma secção;

$t$  – idade do betão à data dos ensaios;

### Letras minúsculas gregas

$\delta$  – deslocamento devido a uma carga actuante;

$\varepsilon_{cr}$  – valor da extensão de fissuração do betão;

$\varepsilon_u$  – valor da extensão última do aço;

$\varepsilon_0$  – valor da extensão última do betão;

$\theta$  – rotação unitária;

$\theta_{cr}$  – rotação unitária de fissuração;

$\theta_y$  – rotação unitária de cedência;

$\theta_{max}$  – rotação unitária máxima;

$\phi$  – diâmetro de um varão de aço;

$\mu_{Tcr}$  – momento torsor reduzido de fissuração;

$\mu_{Ty}$  – momento torsor reduzido de cedência;

$\rho$  – taxa de armadura de uma secção;

$\sigma_{max}$  – tensões máximas devidas à torção;

## **ABREVIATURAS**

BA– Betão Armado

DEC - Departamento de Engenharia Civil

EC2 – Eurocódigo 2

ELS – Estados Limites de Serviço

ELU – Estados Limites Últimos

FCTUC – Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade de Coimbra


FORTTRAN – IBM Mathematical FORMula TRANlation System

LEMEC – Laboratório de Estruturas, Mecânica Estrutural e Construções

## 1 INTRODUÇÃO

Ao longo da História da Humanidade, algumas estruturas surgiram como um aspecto marcante e revelador da evolução das sociedades. Muitas foram as civilizações que até à data são lembradas pelo belo, icónico e por vezes grandioso legado estrutural que deixaram, como é o caso das pirâmides do Egipto, ou das pontes e aquedutos romanos em arco. Ao longo do tempo, foram surgindo concepções estruturais cada vez mais distintas e mais arrojadas, à medida que o estudo sobre os materiais e os fenómenos físicos, a eles associados, foi sendo aprofundado e dominado. Particularmente, nas estruturas de betão armado, BA, os conhecimentos sobre o material em si e o seu comportamento em relação às solicitações aplicadas desenvolveram-se devido à sua popularidade como material de construção, logo no princípio do séc. XX, permitindo uma maior complexidade de concepção estrutural, desde então.

Neste contexto, o fenómeno da torção das peças de BA foi sempre descurado até meados do século passado, por se acreditar na capacidade de redistribuição de esforços das estruturas e na reserva de segurança que os coeficientes utilizados nos cálculos permitiam. Quando, por volta de 1960, começou a investigação deste fenómeno, descobriram-se aspectos bastante importantes associados a este tipo de esforço que não podiam ser ignorados. Entre estes aspectos, a grande perda de rigidez após fissuração e a possível rotura frágil não desejável, tornaram-se objecto de estudo desde então. Com a procura de novas soluções arquitectónicas, vão surgindo casos de estruturas arrojadas em que o esforço de torção é predominante nas lajes de BA. Daí que o correcto dimensionamento dessas lajes dependa da exactidão com que se conhece o comportamento à torção desse tipo de elementos.

Actualmente, ns programas de cálculo automático de estruturas conseguem modelar de forma bastante a fase elástica, ou não fissurada, do comportamento deste tipo de estruturas. Contudo, estes programas não conseguem prever com grande exactidão, nem o limite desta fase elástica, nem a segunda fase de desenvolvimento de fissuras, nem tão pouco a terceira fase de cedência das armaduras até à rotura. Ou seja, não existe forma prática de modelar, com grande exactidão, o comportamento não linear deste tipo de estruturas.

Uma das dificuldades encontradas reside no facto de não haver artigos científicos referentes a este tema, com excepção dos dois casos (Marti e Kong, 1987) e (Marti et al, 1987). Consequentemente não existe um caminho já trilhado que indique as bases para se chegar a teorias gerais e consistentes, relativamente ao tema torção em lajes de BA. Tomando como ponto de partida as teses elaboradas no Departamento de Engenharia Civil da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra (DEC-FCTUC) sobre o tema, pôde-se ter

termos de referência para a análise teórica, nomeadamente os resultados experimentais obtidos por (Menoita, 2010), (Rodrigues, 2011), (Ferreira, 2011) e (Gonçalves, 2010), e trabalhos de carácter numérico desenvolvidos por (Pontes, 2009) e (Ribeiro, 2008) que permitiram as análises feitas para a avaliação teórica a que se propunha esta tese.

## **1.1 Objectivos**

Uma vez que, as teorias enunciadas para a torção em elementos de BA são, essencialmente, relativas a vigas, torna-se importante o desenvolvimento de teorias que permitam a correcta avaliação do comportamento das lajes submetidas a este tipo de solicitação.

No presente trabalho, pretende-se efectuar uma avaliação teórica do comportamento não linear de lajes de BA submetidas à torção. O objectivo consiste na caracterização de cada uma das fases do comportamento genérico de uma laje de BA submetida à torção. Assim, a metodologia geral que se usou foi a de se usar programas numéricos, onde se fez variar os parâmetros intervenientes no fenómeno em estudo e, comparar e ajustar, os resultados obtidos com os resultados experimentais disponíveis, para daí se retirarem ilações que permitam uma caracterização prática do comportamento pretendido.

## **1.2 Estrutura do documento**

A dissertação presente é constituída por 6 Capítulos, que seguem a estruturação seguinte:

### **Capítulo 1: Introdução**

Neste capítulo é efectuado um enquadramento geral do tema, definidos os objectivos e a metodologia geral adoptada, bem como a descrição da organização do documento.

### **Capítulo 2: Revisão Bibliográfica**

Este capítulo resume a pesquisa realizada ao longo da bibliografia sobre o fenómeno da torção e a descrição do comportamento das estruturas de BA.

### **Capítulo 3: Programas e Exemplos Base**

Neste capítulo explicam-se os aspectos fundamentais do funcionamento dos programas computacionais utilizados. Também são apresentadas as lajes ensaiadas experimentalmente que serviram de exemplo base para a análise.

### **Capítulo 4: Ponto de Fissuração**

Este é o capítulo no qual se explicam as metodologias utilizadas para realização dos testes paramétricos referentes aos parâmetros do betão, analisam-se os resultados obtidos e define-se o ponto de fissuração.

#### Capítulo 5: Ponto de Cedência

Neste capítulo são efectuados os testes paramétricos relativos ao aço, são analisados os resultados e define-se o ponto de cedência. É definida ainda a relação entre o ponto de cedência e o ponto de carga máxima, ficando este último ponto igualmente definido.

#### Capítulo 6: Conclusões

Este é o capítulo onde se apresentam as principais conclusões da análise teórica realizada e também se apresentam as sugestões de aspectos e questões a serem abordados em trabalhos futuros.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Em Engenharia Civil, no que se refere às estruturas, de uma forma geral, e às de BA em particular, o objectivo da concepção, da análise estrutural, do dimensionamento e da própria construção consiste em garantir um bom desempenho ao nível da resistência e ao nível do aspecto e da durabilidade. A resistência é usualmente garantida com as verificações dos Estados Limites Últimos (ELU) enquanto a durabilidade e o aspecto são verificados nos Estados Limites de Serviço (ELS). Segundo (Beeby e Nayaranan, 2005), os ELS correspondem, geralmente, às condições da estrutura em uso. Estes ELS incluem a deformação, a fissuração e a vibração da estrutura cujas consequências poderão ser: danos nos elementos não-estruturais ou no conteúdo dos edifícios (como equipamentos diversos), desconforto dos ocupantes do edifício, a afectação tanto da durabilidade como do aspecto e estanquidade. De uma forma geral, a rigidez e o dimensionamento, da estrutura em causa, são condicionados pelos ELU e ELS. O comportamento das estruturas de BA, nomeadamente a curva carga-deslocamento, determina a fronteira entre os ELU e os ELS, pelo que a sua detalhada caracterização, em função das solicitações a que a estrutura estará sujeita, permite a verificação das disposições regulamentares referentes a esses Estados Limites

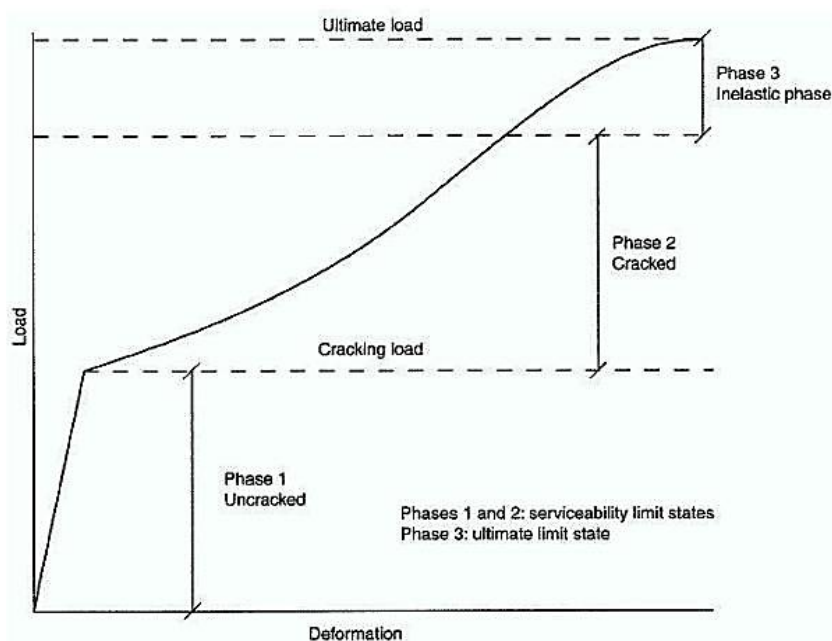


Figura 2.1- Curva carga-deslocamento de um elemento de BA (Beeby e Nayaranan, 2005).

Em (Beeby e Nayaranan, 2005) foi descrita uma forma da curva carga-deslocamento, genérica, para elementos de BA. Na Figura 2.1 acima, apresenta-se essa curva a fim de ilustrar as fases do comportamento genérico de uma estrutura de BA.

Na figura, notam-se as três fases distintas que definem a curva  $P-d$ . Na fase inicial, o betão ainda não terá fissurado, pelo que o comportamento é considerado elástico linear até se atingir a carga de fissuração a qual limita a fase elástica linear. Na segunda fase, onde o betão já se encontra fissurado, o comportamento torna-se não linear e há uma visível quebra de rigidez. Nesta fase, por já se ter ultrapassado o valor da tensão de rotura à tracção do betão, dá-se uma transferência, gradual da resistência à tracção, do betão para o aço. A resistência é repartida pelo aço e pelo betão devido ao betão aderente às armaduras enquanto a dimensão das fissuras seja reduzida. Após se atingir a carga correspondente à cedência das armaduras traccionadas, devido ao aumento consecutivo das dimensões e do número das fissuras, a tensão de tracção passa a ser suportada unicamente pelo aço. Esta segunda fase decorre entre os pontos de fissuração e de cedência. Estando-se na terceira fase, dá-se, assim, um aumento brusco da extensão das armaduras até se atingir a rotura (Montoya et al, 2001), mencionado em (Pontes, 2009). De notar que a terceira fase, inelástica ocorre para níveis de tensão superiores aos que dizem respeito aos ELS. Assim, as fases da curva do comportamento que constituem os ELS são a primeira, linear elástica, e o início da segunda, não linear.

## 2.1 Torção

O esforço de torção foi desprezado durante muito tempo na Engenharia Civil, nomeadamente nas aplicações a nível estrutural. Citando (Bernardo, 2003): *“No século XX, mesmo depois do betão armado assumir um papel de maior importância na construção de estruturas, a torção foi, durante muitos anos, desprezada para efeitos de dimensionamento. De facto, até à década de 60 era prática comum considerar-se que os esforços de torção não eram importantes e seriam de algum modo absorvidos por redistribuições internas de esforços nas estruturas e pela confortável reserva de resistência que os elevados coeficientes de segurança à flexão proporcionavam.”*

De facto, somente a partir de 1965 é que se começou a investigação intensiva sobre a torção em estruturas de betão armado, mais concretamente no caso de vigas. Começou-se por resolver o problema da capacidade resistente e do dimensionamento. Porém constatou-se uma diminuição significativa da rigidez à torção, no diagrama carga-deslocamento, ao longo da segunda fase, de desenvolvimento de fissuras, e que é muito maior que a queda observada na rigidez em fenómenos apenas de flexão.



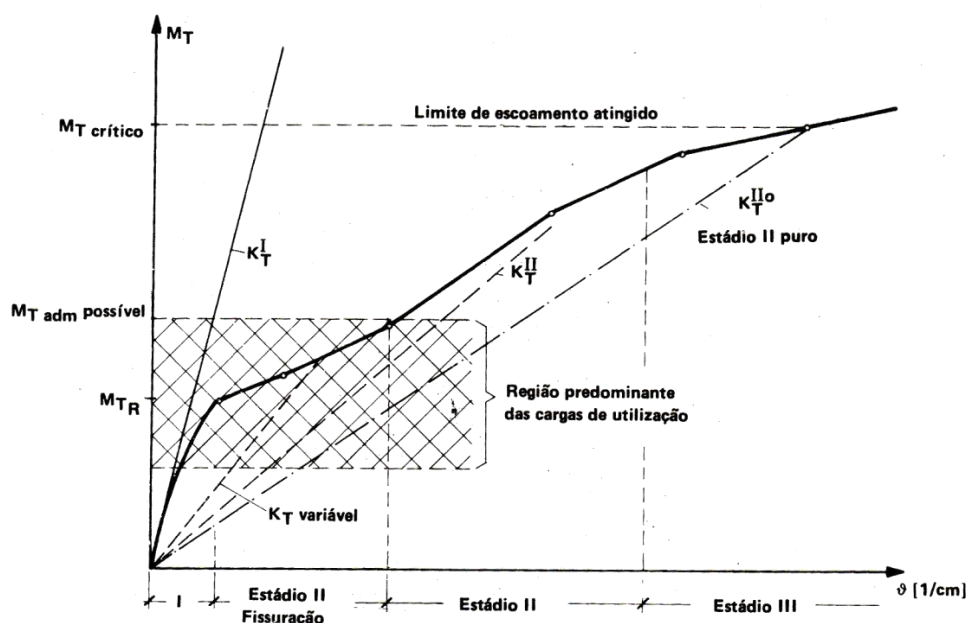


Figura 2.2 - Diagrama Torção-rotação, (Leonhardt e Mönig, 1979)

No caso de torção de equilíbrio, que é a resistência à torção necessária para equilíbrio da solicitação devido a cargas e acções externas, a diminuição significativa de rigidez implica uma grande rotação que, ao atingir valores elevados, pode pôr em causa as verificações dos ELS (Leonhardt e Mönig, 1979). Na Figura 2.2 pode ver-se o fenómeno da diminuição acentuada da rigidez quando da passagem da fase linear elástica para a fase não linear, no diagrama torção-rotação.

### 2.1.1 Torção em Vigas

As teorias existentes sobre o esforço de torção em elementos de BA são, essencialmente, baseadas na análise de elementos prismáticos. De acordo com (Bernardo, 2003), até se chegar às teorias da torção em vigas de BA, houve um percurso histórico da evolução daquelas. Este autor descreve que tudo começa com as teorias da torção em barras homogêneas, em que Navier deduziu uma equação teórica para a torção de uma barra prismática elástica com secção circular. Três décadas depois, surge a teoria de St. Venant que veio resolver a problemática da torção em peças prismáticas com secções rectangulares, tendo-se definido a *Constante de Torção de St. Venant*,  $C$ . Posteriormente, Bredt deduziu expressões para o cálculo de tensões e deformações em peças fechadas de paredes finas, sujeitas a um momento torsor. Em 1903, Prandtl descobriu uma interessante analogia entre a função de tensão no problema da torção e a deformada de uma membrana elástica e homogênea sob carregamento uniforme. A analogia constitui uma ferramenta adequada para a visualização da direcção e magnitude das tensões tangenciais em qualquer secção transversal sujeita à torção. Quando se passou para o estudo da torção em vigas de betão não armado, o autor Hsu, referido em

(Bernardo, 2003), através de um programa experimental bastante alargado, estabeleceu, em 1968, que a teoria de St. Venant poderia descrever com precisão o comportamento em torção de secções de betão não armado sujeitas a momentos torsores baixos. Surgem então três teorias para a resistência à torção de vigas de betão não armado com secção rectangular: a *Teoria Elástica*, a *Teoria Plástica* e a *Teoria da flexão enviesada*.

### 2.1.2 Torção em Lajes

Na bibliografia, as teorias existentes sobre o fenómeno de torção são, essencialmente, baseadas na análise de peças prismáticas. Salvo algum trabalho a nível experimental, não se encontram teorias representativas do comportamento genérico de lajes de BA submetidas à torção. De facto, o comportamento dos elementos de placa foi sempre retratado para a consideração de fenómenos de flexão, ficando a torção para segundo plano. Assim, de seguida apresentam-se os trabalhos onde foi abordada a questão da torção em lajes de BA com o objectivo de se efectuar uma caracterização completa do comportamento deste tipo de elementos submetidos à torção pura.

O autor (Pontes, 2009) recorreu à Teoria Elástica, à Teoria Plástica, à Teoria da flexão enviesada, à teoria de St. Venant, a qual é apresentada em (Dias da Silva, 2004), e ainda à teoria da rigidez equivalente, desenvolvida por (Castro, 2001), para a determinação da resistência à torção de lajes de BA. O autor comparou os resultados obtidos pelas cinco teorias relativamente a duas secções rectangulares com altura e largura diferentes, com o objectivo de determinar as diferenças que daí pudessem surgir. Comprovou-se que as teorias apresentavam relações díspares, entre elas, quando se alteravam as dimensões do elemento em causa. De seguida, uma vez que as teorias são todas referentes à primeira fase do diagrama de comportamento à torção, ou seja, à fase linear elástica, onde não se considera a existência das armaduras, compararam-se os resultados, da flecha de um painel apoiado em apenas dois bordos perpendiculares entre si, obtidos com estas teorias com os resultados obtidos pelo programa SAP 2000. Estes foram tidos como referência, uma vez que esse programa fornece resultados que retratam bem a realidade física da fase elástica linear, como será mostrado adiante. Da comparação com os resultados do SAP 2000, chegou-se à conclusão que a teoria da rigidez equivalente e a teoria da flexão enviesada foram as teorias que determinaram resultados mais próximos dos de referência. Estas teorias serviram, então, de base para a caracterização da primeira fase do comportamento de lajes à torção, até se atingir a carga de fissuração. Assim, em (Pontes, 2009), demonstrou-se que é possível extrapolar as teorias existentes para torção em vigas de betão não armado a fim de caracterizar a fase não fissurada de lajes de BA sujeitas a esforços predominantemente de torção. Contudo, estas teorias não são aplicáveis à segunda fase não linear, de desenvolvimento de fissuras. Isto fez com que o autor apenas propusesse uma curva torção-rotação teórica, representativa do comportamento à

torção, que pudesse ser usada no programa de análise não linear então utilizado “ANL\_Grelhas”, para a análise não linear de lajes de BA solicitadas à torção.

Em 1987, (Marti e Kong, 1987) elaboraram um estudo teórico onde se desenvolveram teorias que pudessem prever o comportamento de lajes quadradas de BA submetidas a solicitações de torção pura. As teorias de previsão, definidas no estudo, foram posteriormente testadas tendo como referência os resultados obtidos no programa experimental (Marti et. al, 1987). Os autores definiram as suas teorias baseando-se na teoria de Kirchhoff para placas finas. Assumiram o aço das armaduras com um comportamento linear elástico perfeitamente plástico e ainda consideraram o conhecido efeito “*softening effect*” através de expressões empíricas deduzidas por Vecchio e Collins em 1986. A fim de estabelecer as relações cinemáticas para resolução analítica do problema de uma laje quadrada apoiada em dois cantos diagonalmente opostos e carregada nos outros dois, baseando-se na teoria de Kirchhoff e ainda na consideração de armaduras simétricas em relação ao plano médio, chegou-se às expressões das extensões principais:

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \chi_{xy}^2 z^2} \quad (2.1)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \chi_{xy}^2 z^2} \quad (2.2)$$

Onde,  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  são as extensões principais,  $\varepsilon_x$  e  $\varepsilon_y$  são as extensões axiais segundo x e segundo y,  $\chi_{xy}$  é a rotação, e z é a espessura da laje em causa. A partir destas equações, e da consideração do comportamento não fissurado como elástico linear, com extensões axiais  $\varepsilon_x$  e  $\varepsilon_y$  nulas, deduziu-se a Equação (2.3) para o momento de fissuração  $T_{cr}$  e a Equação (2.4) para a rotação unitária de fissuração  $\chi_{cr}$ :

$$T_{cr} = \frac{f_r \cdot h^2}{6} \quad (2.3)$$

$$\chi_{cr} = \frac{7f_r}{3E_c h} \quad (2.4)$$

Onde  $f_r$  é o valor da tensão de rotura do betão à tracção, assumido como  $f_r = 0,6 \cdot (f_{cm})^{0,5}$  com  $f_{cm}$  em MPa, e  $E_c$  o módulo de elasticidade do betão. Estas equações permitem a descrição da fase linear do comportamento até à fissuração e serão analisadas e testadas adiante. As dificuldades, para o desenvolvimento de teorias analíticas, são acrescidas e tornam-se relevantes para a descrição do comportamento de lajes de BA na fase não linear, de

desenvolvimento de fissuras. Resumidamente, os autores propuseram duas alternativas de cálculo para caracterizar a segunda fase do comportamento: uma teoria de comportamento linear para aproximação do comportamento real e uma teoria de comportamento não linear. Para análise da carga última, propôs-se uma teoria de análise plástica limite. Apresentar-se-ão, de seguida, apenas os aspectos gerais destas teorias, de forma a não tornar exaustiva a exposição.

Na teoria de comportamento linear, os fundamentos, que permitiram o desenvolvimento da mesma, foram: comportamento linear do betão à compressão apesar de fissurado, homogeneização da secção, taxas de armaduras iguais para as duas direcções x e y. Com estas considerações, deduziram-se as Equações (2.5) e (2.6):

$$\alpha = 0,5 + 2n\rho - \sqrt{2n\rho(1 + 2n\rho)} \quad (2.5)$$

$$T = \frac{E_c h^3 \chi_{xy}}{24} (4\alpha^3 - 3\alpha + 1) \quad (2.6)$$

Onde  $n = E_s/E_c$  é o coeficiente de homogeneização do aço em betão,  $\rho$  é a taxa de armadura e os restantes parâmetros já definidos anteriormente. Nesta última equação, é possível verificar que, para uma dada laje, a relação  $T/\chi$  é linear, significando que a segunda fase do comportamento pode ser caracterizada por uma recta, cuja inclinação depende de  $E_c$ ,  $h$  e de  $\alpha(n, \rho)$ . Para além disso, a equação dita que essa recta passa pela origem. Só não referem o modo de avaliar o término da segunda fase, ou seja, a caracterização do ponto de cedência.

Para o desenvolvimento da teoria do comportamento não linear, o autor Keith Kong desenvolveu um programa computacional de resolução numérica iterativa para determinação do momento torsor de cedência. A partir desse programa o autor desenvolveu ábacos com e sem a consideração do fenómeno “*softening effect*” que fornecem o momento de cedência em função das características do betão e do aço.

A Teoria de análise plástica limite, resulta da consideração das relações gerais para o betão fissurado, mencionados na explicação da teoria de comportamento linear, porém considerando que as tensões de tracção são todas resistidas pelo aço. Assim, para uma laje com taxa de armadura relativamente baixa e igual nas duas direcções x e y, deduziu-se a Equação (2.7):

$$T_u = f_c h^2 \omega (1 - 2\omega) \quad (2.7)$$

Onde  $f_c$  é o valor da tensão de rotura do betão à compressão, e a taxa de armadura  $\omega = \rho f_y / f_c$  sendo  $f_y$  o valor da tensão de cedência do aço. Esta equação só é válida para valores de  $\omega \leq$

1/4. Para valores de  $\omega > 1/4$ , ou seja, taxas de armadura relativamente elevadas, o aço não entra em cedência, passando a rotura a dar-se por esmagamento do betão, donde resulta:

$$T_u = \frac{f_c \cdot h^2}{8} \quad (2.8)$$

De todas as teorias apresentadas, a que melhor retratou o comportamento na fase não linear e na fase de rotura, das lajes ensaiadas em (Marti et al, 1987), foi a teoria de comportamento não linear com recurso ao programa computacional de análise numérica iterativa.

Os autores concluíram que a teoria enunciada para a caracterização da fase elástica linear fornece bons resultados para o momento de fissuração, sendo próximos dos observados nos ensaios experimentais (Marti et al, 1987). Porém, quando se passa para a caracterização da segunda fase de comportamento de lajes de BA, fase essa de desenvolvimento das fissuras, a teoria de comportamento não linear foi a que melhor se aproximou dos resultados obtidos experimentalmente. Ou seja, pelo que se confirma graficamente no artigo apresentado, o programa computacional de resolução numérica iterativa, desenvolvido por Keith Kong, constitui uma ferramenta adequada para a análise de lajes de BA submetidas à torção, sendo as restantes teorias apresentadas pouco adequadas para a mesma análise.

### 3 PROGRAMAS E EXEMPLOS BASE

Neste capítulo pretende-se apresentar os programas SAP2000 e ANL\_Grelhas utilizados neste trabalho. Para além disso, são ainda apresentados alguns resultados experimentais de exemplos recolhidos na bibliografia. Estes resultados serão posteriormente utilizados na determinação da curva teórica de comportamento de lajes sujeitas à torção.

#### 3.1 Programa SAP 2000

O programa SAP 2000 é um *software* comercial de cálculo estrutural o qual recorre à formulação do Método dos Elementos Finitos, baseado em deslocamentos. O programa é usado na prática corrente da Engenharia Civil para cálculo de estruturas, nomeadamente as de BA e as metálicas. A modelação que se fez no SAP 2000 importou, apenas, para a análise da fase elástica linear, uma vez que o mesmo não considera a contribuição das armaduras presentes nas lajes nem a fissuração do próprio betão.

As modelações das lajes foram feitas recorrendo à discretização com elementos finitos de 4 nós, cujas áreas são aproximadamente quadradas. Evitou-se ainda ter elementos com largura e comprimento inferiores ao valor da altura da laje. Os elementos de placa, no SAP 2000, são usados para modelar o comportamento de placas, cascas e membranas em estruturas planares ou tridimensionais (Computers and Structures Inc., 2009). Neste caso, na modelação das lajes, utilizaram-se elementos de placa grossa formulados a partir da teoria de Reissner-Mindlin, incluindo assim, na análise em causa, a deformabilidade por esforço transversal conjuntamente com a deformabilidade de flexão. A utilização de elementos de placa grossa, e implicitamente a teoria de Reissner-Mindlin, é aconselhável sempre que a relação vão/espessura for inferior a 10 (Castro, 2001). As lajes que se modelaram no programa SAP 2000 apresentaram, todas, uma relação vão/espessura superior a 10 porém, ainda assim, adoptou-se a opção de cálculo de placas grossas para se ter em consideração o efeito da deformabilidade de corte. Mas há que realçar que surgem dificuldades numéricas quando se aplica a teoria de placas grossas a placas com a relação vão/espessura superior a 10 (ditas finas). Segundo (Pereira, 2003) quando se divide a matriz de rigidez elementar em duas parcelas, uma relativa ao corte e outra relativa à flexão, comete-se um erro numérico significativo na soma destas duas parcelas quando a relação  $L/h$  aumenta. De facto, os termos da parcela relativa à flexão tornam-se muito pequenos em relação aos termos relativos à parcela de corte. Consequentemente, os deslocamentos do modelo de elementos finitos passam a depender principalmente da deformabilidade de corte. Isto é precisamente contrário à realidade pois numa laje fina, os deslocamentos dependem, essencialmente da deformabilidade de flexão. Citando (Pereira,

2003): “(...) a deformabilidade de corte é proporcional a  $1/h$  e a deformabilidade de flexão a  $1/h^3$ , isto significa que a rigidez do modelo de elementos finitos, que à partida é sempre maior que a da laje real, está ainda a ser sobrestimada devido a erros numéricos.” Este fenómeno de sobrestimação da rigidez de corte é denominado de “*ShearLocking*”. Neste caso, o SAP 2000 utiliza uma integração selectiva reduzida aplicada à parcela de corte da matriz de rigidez elementar, pelo que este fenómeno de “*ShearLocking*” é assim contornado, permitindo o uso da teoria de placas grossas em placas finas, sem que haja bloqueamento da solução (Computers and Structures Inc., 2009).

### 3.2 Programa ANL\_Grelhas

O programa de análise não linear de lajes em modelo grelha, designado por “ANL\_Grelhas”, resulta da adaptação de um programa anterior desenvolvido por Adelino V. Lopes, denominado “AL\_Grelhas”.

Segundo (Pontes, 2009), o programa “AL\_Grelhas”, implementado em FORTRAN, resultou ainda da adaptação de um outro programa de cálculo automático de estruturas reticuladas, no contexto da análise linear, através da modelação de elementos finitos de viga de 2 nós, recorrendo à teoria de Euler-Bernoulli para modelação do comportamento à flexão dos elementos. O objectivo da concepção e implementação deste programa consistiu no cálculo automático de estruturas porticadas bidimensionais que através de adaptações, pode entender-se como uma metodologia semelhante ao tradicional Método dos Deslocamentos. Uma descrição mais detalhada deste programa é referida em (Lopes A. V., 2005).

Citando (Pontes, 2009): “(...) as principais alterações focaram-se na teoria do elemento finito utilizado e na adaptação das coordenadas locais dos nós do elemento. Neste sentido, e com a finalidade de contabilizar a parcela de corte da deformação, o elemento finito utilizado foi o elemento de viga de Timoshenko.” Para a simulação da rigidez de uma laje, as coordenadas foram também adaptadas para que se pudesse recorrer a elementos de vigas para a modelação em grelha. Ou seja, de entre as três coordenadas locais em cada nó, referentes ao deslocamento vertical, à rotação de flexão e ao deslocamento longitudinal, substituiu-se o grau de liberdade correspondente à translação axial pelo grau de liberdade correspondente à rotação axial, i.e. de torção. Desta forma conseguiu-se a consideração da rigidez de torção dos elementos finitos de viga utilizados no modelo de grelha (Pontes, 2009).

O programa “ANL\_Grelhas” surge, assim, da necessidade da determinação das deformações a curto e a longo prazo em lajes de BA, no contexto de uma análise não linear. Numa fase em que o betão não apresente fissuras, os métodos de análise linear podem ser utilizados para a caracterização do comportamento estrutural do BA. Porém, após a fissuração, as secções de

BA perdem uma boa parte da sua rigidez fazendo com que métodos de análise linear não possam prever adequadamente, para esta segunda fase, a distribuição interna de esforços e consequentemente os deslocamentos sofridos.

A adaptação e a implementação, mais relevantes que foram feitas ao programa “ANL\_Grelhas”, por (Pontes, 2009) consistiram na inclusão de um modelo de comportamento não linear à torção dos elementos finitos de viga utilizados na modelação de grelha, que permitiu que a presente tese pudesse ser desenvolvida.

Assim, o programa “ANL\_Grelhas” constitui uma ferramenta de cálculo para a realização de análises não lineares. O cálculo das deformações, propriamente dito, é realizado pelo programa com recurso a um algoritmo incremental de carga até se atingir a carga máxima suportada pela laje. Em cada incremento de carga, o modelo determina uma configuração geométrica do sistema estrutural que torne possível o equilíbrio das forças externas aplicadas (Ribeiro, 2008).

O programa “ANL\_Grelhas” subdivide-se em dois programas distintos que permitem descrever o comportamento das lajes de BA. O primeiro é baseado num algoritmo que calcula a relação momento-curvatura e o segundo baseado num algoritmo incremental de carga que calcula a configuração geométrica e os respectivos esforços internos para cada incremento. Para além disso, este último programa carece da definição da curva  $T-\theta$  necessária à caracterização do comportamento à torção das vigas da grelha.

### **3.2.1 Momento-Curvatura**

Este algoritmo numérico determina a relação Momento-Curvatura  $M-\chi$ , de uma dada secção transversal de uma peça de BA mediante o controlo das deformações que esta vai tendo. Ou seja, através das curvaturas sucessivamente crescentes, calculam-se os momentos flectores correspondentes, admitindo que o esforço axial é nulo e que as secções, inicialmente planas, permanecem planas após a deformação (Lopes A. V., 2005). Os dados requeridos por este algoritmo são: a geometria da secção transversal e as características gerais dos materiais, nomeadamente o betão e o aço (Ribeiro, 2008).

### **3.2.2 Algoritmo incremental de carga**

Este segundo subprograma do “ANL\_Grelhas” efectua, através de uma análise incremental não linear, o cálculo dos deslocamentos que o modelo de grelhas necessita para equilibrar o carregamento a que é submetido em cada incremento. Deste modo, ao longo da análise iterativa, vai sendo determinado o diagrama carga-deslocamento  $P-d$ , que caracteriza o comportamento da laje quando submetida a uma determinada acção. Esta análise iterativa depende de duas componentes da resistência das lajes que são a componente de resistência à



flexão, i.e. da relação momento-curvatura, e a componente da resistência à torção, i.e. da relação torção-rotação  $T-\theta$ . Esta última componente dos dados introduzidos é muito importante no caso do estudo teórico do comportamento das lajes submetidas essencialmente à torção.

### 3.2.2.1 Torção-Rotação

Para a definição das curvas torção-rotação, que caracterizam o comportamento dos elementos finitos de viga sujeitos à torção, (Pontes, 2009) baseou-se nas teorias existentes para vigas submetidas à torção pura e idealizou uma curva  $T-\theta$  que pudesse ser usada no programa “ANL\_Grelhas”. A curva idealizada teve por base o trabalho elaborado por (Bernardo, 2003) onde este reuniu uma série de conclusões, baseadas em resultados experimentais de vigas de BA, possuindo armadura transversal e longitudinal, com taxas de armadura regulamentares e submetidas à torção pura. Na Figura 3.1, apresenta-se a curva proposta por (Bernardo, 2003) em que as relações  $T-\theta$  são independentes da classe do betão usado.

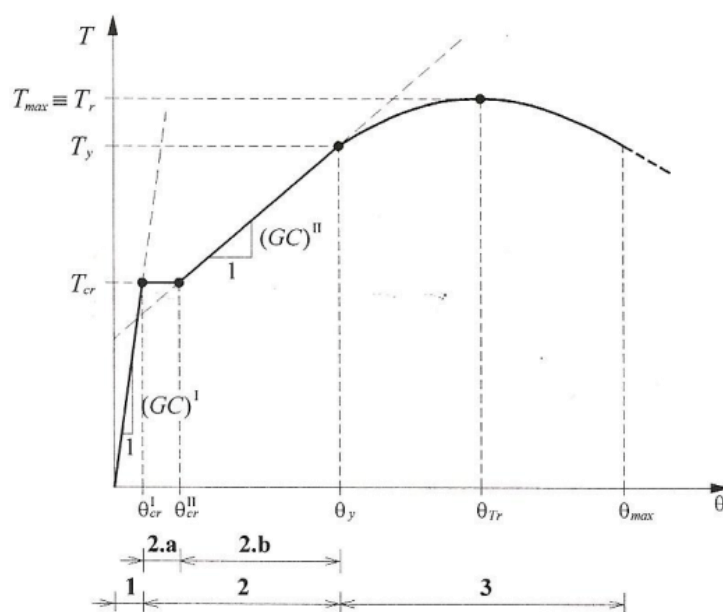


Figura 3.1- Curva Torção-Rotação de uma Viga de BA, (Bernardo, 2003).

Ao longo da sua tese, (Pontes, 2009) trabalhou com base na curva acima apresentada, seguindo as várias teorias aplicáveis e enunciadas para o caso de vigas, a fim de efectuar a extrapolação dessas mesmas teorias e definir uma curva que fosse genérica para o caso do comportamento à torção de lajes de BA modeladas por grelhas. A curva proposta, então, é apresentada na Figura 3.2 Neste caso, a curva simétrica é composta por um troço linear inicial, e por um patamar de plastificação. Uma definição bastante simplificada.

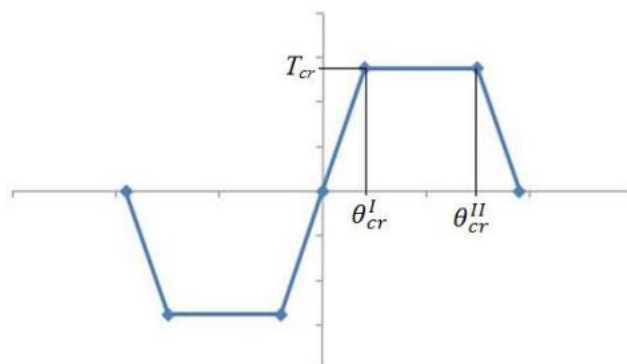


Figura 3.2- Curva Torção-Rotação, (Pontes, 2009).

Posteriormente, (Menoita, 2010) e (Gonçalves, 2010) concluíram que a curva genérica proposta por (Pontes, 2009) não conduzia a bons ajustes dos diagramas Carga-Deslocamento teóricos aos diagramas obtidos experimentalmente. Isto serviu de motivação para que na tese (Rodrigues, 2011) se passasse para um ajuste manual das curvas teóricas dadas pelo programa “ANL\_Grelhas” e as curvas experimentais obtidas. Este autor, seguindo uma metodologia de ajuste manual por tentativa e erro, para cada uma das lajes, conseguiu definir a forma da curva genérica do comportamento à torção. Os ajustes feitos, culminaram em curvas idênticas à apresentada na Figura 3.3. Nesta curva são visíveis as três fases do comportamento estrutural, as quais são delimitadas pelos pontos de fissuração, de cedência e de momento máximo.

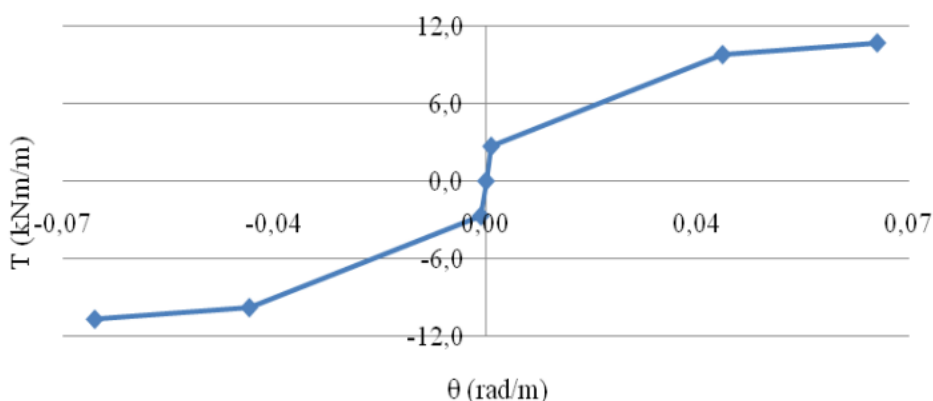


Figura 3.3- Curva Torção-Rotação, (Rodrigues, 2011).

Foi com base em curvas, com contornos idênticos à acima apresentada, que ao longo do desenvolvimento desta tese, se realizou a análise teórica do comportamento de lajes de BA submetidas à torção. Para tal basta localizar os pontos referidos anteriormente.

### 3.3 Exemplos

Para o presente estudo, tornou-se imperativo ter resultados experimentais disponíveis que servissem de termo de referência para os testes paramétricos teóricos que se pretendiam fazer. Além dos parâmetros que caracterizam as lajes, importava os diagramas de carga-deslocamento  $P-d$  que delas se pôde obter. Desta forma aproveitaram-se os resultados obtidos dos programas experimentais realizados por (Menoita, 2010), (Rodrigues, 2011) e (Ferreira, 2011) no Laboratório de Estruturas, Mecânica Estrutural e Construções (LEMEC) do DEC - FCTUC, em que se ensaiaram lajes submetidas a esforços de torção. Também se recorreu aos resultados obtidos no programa experimental realizado por (Marti et al, 1987) onde também as lajes foram testadas à torção. Uma vez que este conjunto de resultados continha, entre as várias lajes, algumas variações paramétricas, nomeadamente as características mecânicas, as dimensões e a taxa de armadura, tornou-se possível a realização de testes paramétricos teóricos donde se pudesse extrair relações entre os vários parâmetros e as acções a que as lajes foram submetidas, para que o comportamento de lajes à torção fosse caracterizado.

Para melhor caracterização e descrição das características das lajes, cujos resultados foram utilizados nas análises feitas, estas foram agrupadas por nome dos autores dos programas experimentais onde se inserem.

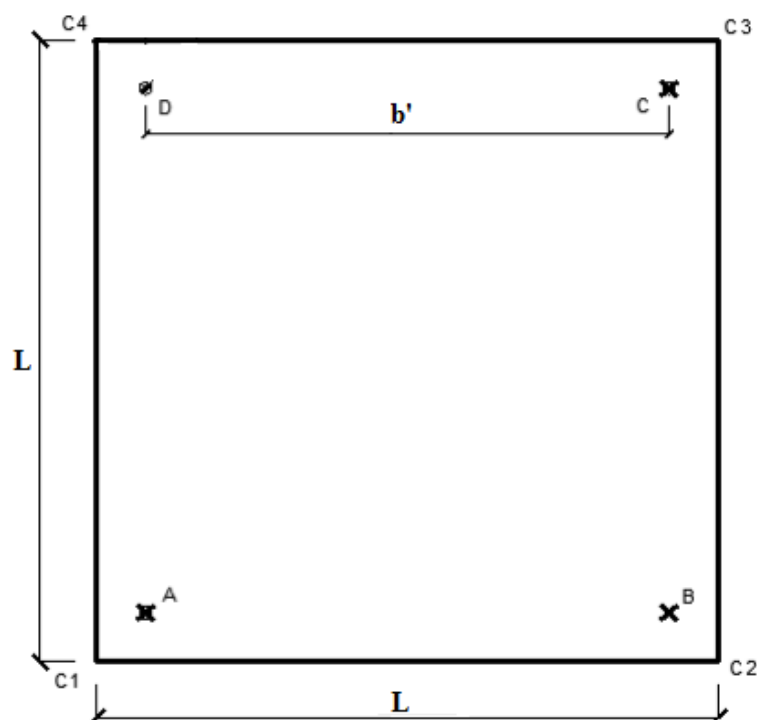


Figura 3.4 - Dimensões e pontos de apoio/carga das lajes, adaptado de (Menoita, 2010).

Na Figura 3.4 representa-se um desenho esquemático do sistema de ensaio que se preconizou para as lajes, sendo visíveis os 3 pontos onde foram materializados os apoios (pontos A, B e C) bem como o ponto onde se materializou a acção (ponto D). As lajes têm a particularidade de serem todas quadradas de lado  $L$ , e terem uma distância  $b'$  entre os pontos de apoio que difere entre cada grupo de lajes bem como a altura  $h$ . Assim, na descrição de cada grupo de lajes, far-se-á referência às dimensões seguindo o desenho da Figura 3.4.

### 3.3.1 Lajes PF

As Lajes PF 2, PF 3 e PF 4 foram as lajes ensaiadas por (Ferreira, 2011) aquando do desenvolvimento da sua tese de mestrado. Para a composição do conjunto de lajes que seriam ensaiadas à torção, betonaram-se 3 lajes, a PF3, a PF4 e a PF5. A estas 3 lajes, juntaram-se outras duas, que tinham sido betonadas em 2010, nomeadamente a Laje PF1 e a Laje PF2. Estas lajes, mais antigas, diferem das restantes em termos de dimensões, apresentando  $L=2,1\text{m}$  e  $b=1,768\text{m}$ . As Lajes PF3, PF4 e PF5, por sua vez, eram maiores:  $L=2,8$  e  $b'=2,475\text{m}$ .

Para a caracterização do betão usado, betonaram-se 40 cubos com 15cm de aresta para a realização de ensaios à compressão. Na Tabela 3.1 apresentam-se os valores médios da tensão de rotura do betão à compressão bem como a idade do betão, em dias, na altura da realização dos ensaios.

Tabela 3.1 - Dimensões e Resistência do betão à compressão das Lajes PF.

Lajes	Altura $h$ [m]	Tempo $t$ [dias]	$f_{cm}$ [MPa]
PF 2	0,160	370	33,9
PF 3	0,148	29	28,9
PF 4	0,150	32	29,2

O aço usado para a construção das armaduras presentes nas lajes também foi submetido a ensaios a fim de se determinarem quais as suas características mecânicas. De notar que todas as lajes, de 2010 e as de 2011, foram armadas com varões  $\phi 8$  afastados de 10cm por face. A Tabela 3.2 reúne a caracterização do aço utilizado nas Lajes PF.

Tabela 3.2 - Características do Aço das Lajes PF.

Laje	Armadura	$A_s$ [cm <sup>2</sup> /m]	$\rho$ [%]	$f_{sy}$ [MPa]	$f_{su}$ [MPa]	$\varepsilon_u$ [%]
PF 2	Φ8//0,10m	5,03	0,41	529	646	9,4
PF 3				542	666	5,6
PF 4						

### 3.3.2 Lajes M

As Lajes M1, M2, M3, M4, M5, M6 e M8, foram as lajes ensaiadas na sequência do desenvolvimento da tese de mestrado (Menoita, 2010). Estas lajes, de dimensões  $L=2,1\text{m}$  e  $b'=1,77\text{m}$  foram betonadas em Abril de 2010, tendo sido ensaiados, posteriormente, 30 cubos de betão de dimensões  $15\times 15\times 15\text{cm}^3$  para se apurar o valor médio da tensão de rotura à compressão  $f_{cm}$ , do betão utilizado. Assim, apresentam-se na Tabela 3.3 os valores referentes às dimensões das Lajes M e os valores médios da resistência à compressão do betão à data dos ensaios.

Tabela 3.3 - Dimensões e Resistência do betão à compressão das Lajes M.

Lajes	Altura $h$ [m]	Tempo $t$ [dias]	$f_{cm}$ [MPa]
M1	0,156	45	25,3
M2	0,155	39	24,9
M3	0,156	39	24,9
M4	0,144	38	24,8
M5	0,153	39	24,9
M6	0,156	38	24,8
M7	0,153	40	25,0
M8	0,154	40	25,0

O aço utilizado para construção da armadura presente na laje também foi submetido a ensaios de tracção a fim de se determinar a tensão de cedência e respectivas extensões. A área de aço por face  $A_s$ , a taxa de armadura correspondente  $\rho$ , o valor médio da tensão de cedência  $f_{sy}$ , o valor da tensão última  $f_{su}$ , e respectiva extensão última  $\varepsilon_u$ , são apresentados na Tabela 3.4.

Tabela 3.4 - Características do Aço das Lajes M.

Laje	Armadura	$A_s$ [cm <sup>2</sup> /m]	$\rho$ [%]	$f_{sy}$ [MPa]	$f_{su}$ [MPa]	$\epsilon_u$ [%]
M1	Φ8//0,10m	5,03	0,41	576	626	5,4
M2				585	631	4,7
M3				576	626	5,4
M4				585	631	4,7
M5	Φ10//0,15m	5,24	0,44	620	669	5,2
M6				617	665,6	6,0
M7				620	669	5,2
M8				617	665,6	6,0

### 3.3.3 Lajes Old e New

As Lajes Old3 e New3 constituem as lajes que foram submetidas a ensaios experimentais à torção e reportadas na tese de mestrado de (Rodrigues, 2011) que neste trabalho foram utilizadas como referência experimental para o estudo teórico efectuado. A Laje Old3, assim designada por ter sido construída em 2010, tem dimensões diferente da Laje New3 construída em 2011. A Laje Old tem  $L=2,1\text{m}$  e  $b=1,768\text{m}$  sendo menores que as dimensões de  $L=2,8\text{m}$  e  $b'=2,475\text{m}$  correspondentes à Laje New3.

Para a caracterização do betão usado, à semelhança do que foi feito para as Lajes PF, betonaram-se 40 cubos com 15cm de aresta para a realização do ensaio à compressão. Com este ensaio aos cubos determinaram-se os valores médios da tensão de rotura do betão à compressão. Na Tabela 3.5 apresentam-se esses valores bem como a idade do betão, em dias, na altura da realização dos ensaios.

Tabela 3.5 - Dimensões e Resistência do betão à compressão das Lajes Old e New.

Lajes	Altura $h$ [m]	Tempo $t$ [dias]	$f_{cm}$ [MPa]
Old3	0,155	369	33,9
New3	0,149	33	29,3

Os varões de aço, das armaduras presente nas lajes, foram submetidos a ensaios de tracção, com o objectivo de se determinarem as suas características mecânicas. O ensaio determinou o valor médio da tensão de cedência  $f_{sy}$ , o valor da tensão última  $f_{su}$ , e respectiva extensão  $\epsilon_u$ . De realçar que as lajes de 2010 e a de 2011 foram armadas com varões  $\Phi 8$  afastados de 10cm por face, possuindo assim a mesma área de aço  $A_s$  por cada metro de largura e a mesma taxa de armadura  $\rho$ . A Tabela 3.6 reúne a caracterização do aço utilizado nas Lajes PF.

Tabela 3.6- Características do Aço das Lajes Old e New

Laje	Armadura	$A_s$ [cm <sup>2</sup> /m]	$\rho$ [%]	$f_{sy}$ [MPa]	$f_{su}$ [MPa]	$\epsilon_u$ [%]
Old3	$\Phi 8//0,10m$	5,03	0,41	529	646	9,4
New3				542	666	5,6

### 3.3.4 Lajes ML

O programa experimental, apresentado no artigo científico de (Marti et. al, 1987), foi realizado tendo em conta um conjunto de nove lajes que foram submetidas à torção. De todas as lajes ensaiadas, apenas foram utilizados os resultados referentes a quatro delas, designadamente as Lajes ML2, ML3, ML6 e ML9. A escolha das Lajes ML2, ML3 e ML9 deve-se ao facto de serem aquelas cujas taxas de armadura são iguais nas duas direcções. A Laje ML6 apesar de não ter a mesma taxa de armadura nas duas direcções, teve uma rotura dúctil, pelo que, para a análise da fase de desenvolvimento de fissuras até à cedência das armaduras, revelou-se um resultado viável. Estas quatro lajes têm dimensões relativamente reduzidas, apresentando  $L=1,7m$  e  $b'=1,55m$ .

Tabela 3.7 - Dimensões e Resistência do betão à compressão das Lajes ML.

Lajes	Altura $h$ [m]	$f_{cm}$ [MPa]	$\epsilon_0$ [‰]
ML2	0,200	36,2	2,12
ML3	0,200	37,5	2,50
ML6	0,200	23,3	2,48
ML9	0,200	44,4	2,50

Para a caracterização do betão usado, os autores referem a betonagem de cilindros com 15,2cm de diâmetro e 30,5cm de altura para ensaios à compressão que determinassem o valor médio da tensão de rotura do betão à compressão e a extensão última do betão à compressão  $\varepsilon_0$ . Na Tabela 3.7 acima, resume-se a informação disponibilizada no artigo sobre a caracterização da resistência do betão das lajes.

Quanto à caracterização do aço constituinte dos varões das armaduras usadas, os autores referem a realização de ensaios à tracção dos varões para determinação do valor médio da tensão de cedência. De referir que os varões usados pelos autores não correspondem aos varões comerciais usuais em Portugal, pelo que a sua referência não é feita através do diâmetro  $\phi$  mas sim pela área da secção transversal de cada varão  $A_{s,Varão}$ . Na Tabela 3.8 apresentam-se os parâmetros que caracterizam o aço utilizado.

Tabela 3.8 - Características do Aço das Lajes ML.

Laje	$A_{s,Varão}$ [mm <sup>2</sup> ]	$A_s$ [cm <sup>2</sup> /m]	$\rho_x$	$\rho_y$	$f_{sy}$ [MPa]
ML2	100	10	1%	1%	551
ML3	200	20	1%	1%	481
ML6	200	20	1%	0,5%	551
ML9	200	20	1%	1%	412

Pelo que da tabela acima se pode depreender, houve variação da tensão de cedência do aço utilizado. Este facto revelar-se-á importante para a análise da fase de desenvolvimento das fissuras até se atingir o ponto de cedência.



## 4 PONTO DE FISSURAÇÃO

Tal como referido anteriormente, o objectivo deste trabalho consiste em caracterizar o comportamento à torção de lajes maciças de betão armado BA. Este comportamento pode ser descrito pelo diagrama elementar T- $\theta$ , onde T representa o momento torsor por unidade de largura, e  $\theta$  a rotação unitária, i.e. por metro de comprimento do elemento. Neste Capítulo pretende-se caracterizar a posição do ponto de fissuração, ou seja, a primeira fase do comportamento, designada por fase elástica.

Assim, para o efeito, este estudo teórico de lajes de BA, o qual é baseado no modelo de grelhas com elementos de vigas, materializado no programa de análise computacional ANL\_Grelhas apresentado no Capítulo 3, passou por diversas fases: numa primeira fase foi necessário confirmar que outros programas de análise estrutural, nomeadamente o programa SAP 2000, poderiam caracterizar correctamente a primeira fase elástica do comportamento; em segundo lugar foi necessário confirmar que o ponto de fissuração depende essencialmente da quantidade (dimensões) e da qualidade (resistência) do betão à tracção.

A linha de orientação, e de credibilização das conclusões depende dos resultados experimentais disponíveis. Neste caso particular, os 14 conjuntos de resultados experimentais obtidos no âmbito de teses anteriores (Menoita, 2010), (Ferreira, 2011) e (Rodrigues, 2011). Importa salientar que foram estes, e só estes, os resultados encontrados para este Capítulo.

### 4.1 Rigidez elástica

Neste ponto pretende-se verificar a adaptabilidade do programa de análise estrutural SAP 2000 à caracterização do comportamento linear de lajes maciças sujeitas essencialmente a esforços de torção. Esta caracterização baseia-se na quantificação do valor da rigidez da primeira fase elástica.

Assim, considerando as Lajes New3, Old3, M2 a M8 e PF1 a PF5, indicadas no Capítulo 3, procedeu-se à sua modelação no referido programa SAP 2000. Esta modelação foi realizada recorrendo a elementos finitos de placa grossa, de 4 nós, baseados na teoria de Reissner-Mindlin (Oñate, 1992) e (Computers and Structures Inc., 2009). A discretização do plano da laje foi tal que a duplicação dos elementos em cada uma das direcções não produzisse alterações superiores a 5% nos resultados. Neste caso, a dimensão máxima dos elementos foi de  $0,16 \times 0,16 \text{ m}^2$ . A acção foi aplicada num dos elementos  $15 \times 15 \text{ cm}^2$ , ou seja, como carga uniformemente distribuída, tal como sucedeu em termos experimentais. Este procedimento

evita a concentração de tensões que seriam geradas caso se tivesse optado por cargas nodais (Azevedo, 2003). Por sua vez, os apoios foram modelados de modo a que o ponto central do elemento finito tivesse deslocamento vertical nulo.

Após o cálculo do modelo, o deslocamento  $d$  de referência, necessário aos cálculos subsequentes, foi determinado pela média dos deslocamentos verticais referentes aos quatro nós do elemento de área onde se aplicou a carga uniformemente distribuída. Assim, o deslocamento de referência  $d$  corresponde ao deslocamento no mesmo ponto, com a mesma direcção e o mesmo sentido da carga  $P$ , a qual corresponde à carga total aplicada num dos cantos da laje, na direcção normal ao plano da laje.

Em termos de rigidez elástica  $K_I$ , os valores determinados correspondem ao quociente  $P/d$ . Os resultados experimentais  $K_{I,exp}$  das diversas lajes, bem como os resultados teóricos  $K_{I,teor}$  determinados pelo programa SAP 2000, estão indicados na Tabela 4.1 Nesta tabela são ainda indicados os desvios do valor teórico relativamente ao valor experimental.

Tabela 4.1 – Valores da rigidez elástica das lajes de BA.

Laje	$K_{I,exp}$ [kN/m]	$K_{I,teor}$ [kN/m]	$ K_{I,teor} - K_{I,exp}  / K_{I,exp}$
New 3	2726	2969	8,9 %
Old 3	5704	6289	10,7 %
M2	5946	5901	0,8 %
M3	6802	7310	7,5 %
M4	3533	3490	1,2 %
M5	7038	6855	2,6%
M6	3469	3464	0,1 %
M7	5560	5719	2,9 %
M8	6299	6342	0,7 %
PF2	6167	7750	25,7 %
PF3	2744	2944	7,3 %
PF4	3070	3055	0,5%

De forma geral, os valores dos desvios apresentados na Tabela 4.1 podem ser considerados como aceitáveis, visto estarem em geral situados abaixo dos 10%. Contudo, a Laje PF2

apresenta um desvio acima de 25%, o que já se considera ser um desvio considerável. Consequentemente, esta laje e os seus resultados não foram considerados para a avaliação da aproximação da rigidez elástica obtida pelo SAP à rigidez elástica registada experimentalmente. Pensa-se que estas lajes possam ter sofrido alguma irregularidade no processo de fabrico, e/ou ensaio, que inviabilizou a correcta avaliação das características das mesmas, na fase elástica em causa, nomeadamente quanto ao deslocamento. No que toca à carga de fissuração reportada, os valores analisados, de uma perspectiva geral, apresentam uma certa homogeneidade que leva a crer que o problema, do grande desvio destas lajes, possa estar relacionado com os deslocamentos registados. Assim, tem-se resultados disponíveis que permitem afirmar que a modelação com base no programa SAP 2000 permite avaliar, de forma fiel, as características resistentes de lajes maciças de BA, ao longo da fase linear elástica quando sujeitas, essencialmente, a esforços de torção.

Sendo conhecido o caminho inicial para o diagrama carga-deslocamento, resta contudo avaliar, em termos teóricos, o ponto final desta fase elástica, i.e. o ponto de fissuração. A importância da correcta definição deste ponto, prende-se com o facto de esta fase ser linear, pelo que, uma vez definida a carga de fissuração  $P_{cr}$ , e o respectivo deslocamento  $d_{cr}$ , a fase elástica fica totalmente caracterizada a partir do ponto de origem do diagrama Carga-Deslocamento. Definiram-se algumas hipóteses, apresentadas e caracterizadas adiante, que serviram de base para o estudo e definição do referido ponto de fissuração.

## 4.2 Ponto de fissuração

De acordo com o referido anteriormente, o ponto de fissuração determina o fim da primeira fase elástica do comportamento estrutural. Em estruturas de BA, este ponto depende, essencialmente, da quantidade e da qualidade do material betão. Isto é, por si só, não implica que as armaduras não possam ter um papel a ser considerado (Lopes e Lopes, 2012). Contudo, nesta fase do desenvolvimento deste assunto, é possível a não consideração dessa contribuição, tanto mais que, pelo que se conhece em termos de comportamento à flexão em vigas, ela não se revela relevante para a caracterização da fase elástica (Lopes e Lopes, 2012).

Relativamente à quantidade de betão, é a geometria e as dimensões deste que controlam o processo. No caso das lajes de betão armado, a geometria dos elementos é rectangular, caracterizada por uma largura  $b$  e uma altura  $h$ , a qual é medida na normal ao plano médio da laje e é, em geral, muito inferior a  $b$ . A qualidade do betão é normalmente traduzida pelo valor médio da tensão resistente do betão à tracção  $f_{ctm}$ . De seguida, será analisado a influência de cada um destes parâmetros na definição do ponto de fissuração de lajes de BA submetidas a esforços de torção.

Na análise que se segue recorre-se ao programa de cálculo automático ANL\_Grelhas referido anteriormente, para o qual é necessário definir o comportamento, em termos de torção, dos elementos de viga utilizados nas grelhas

#### 4.2.1 Parâmetro $b$

O parâmetro  $b$  representa a largura de um elemento de viga, tal com ilustrado na Figura 4.1. Pode, em alternativa, representar a largura total da laje de BA que esteja em causa. Neste ponto do Capítulo 4, pretende-se concluir qual a influência que este parâmetro exerce sobre a definição do momento de fissuração  $T_{cr}$ , e na rotação de fissuração  $\theta_{cr}$ , por unidade de comprimento  $L$ .

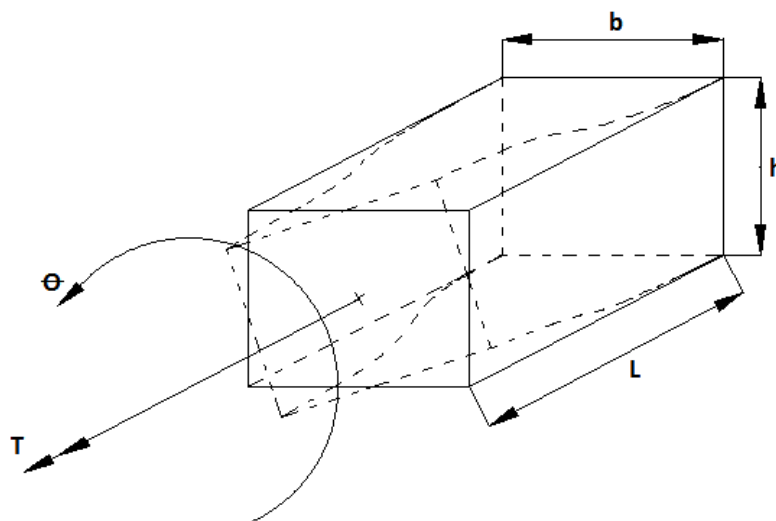
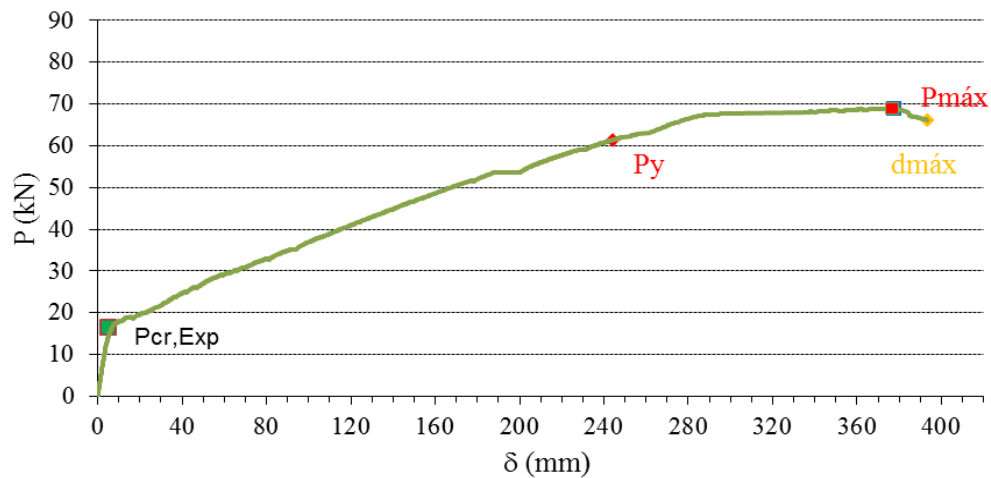


Figura 4.1- Rotação de torção dum elemento de viga.

A metodologia adoptada para a avaliação da influência do parâmetro  $b$  passou por considerar um exemplo, a Laje New3, relativamente à qual se definiram diversas modelações, variando a largura das vigas da malha. Usou-se esta laje porque, de todos os resultados, era a que apresentava mais detalhes nos dados experimentais e a que possuía um diagrama Carga-Deslocamento mais próximo do comportamento de referência de estruturas de BA (Beeby e Nayaranan, 2005), ou seja, apresentava três fases, uma elástica linear até à fissuração, uma outra de desenvolvimento de fissuras até se atingir a cedência e uma última de plastificação das armaduras e posterior rotura ao se atingir a carga máxima.

A Figura 4.2 Ilustra o diagrama  $P-d$  da Laje New3 onde se pode ver o comportamento mencionado acima.

Figura 4.2 - Curva experimental  $P-d$ 

De realçar que, nesta modelação os elementos de viga localizados nos bordos da laje, a largura é fixa, uma vez que a posição dos apoios e também da própria carga, é fixa. De facto, os nós da malha da grelha são colocados a meio da largura dos elementos de viga. De qualquer modo, o primeiro valor de  $b$  a ser ajustado correspondeu exactamente ao  $b$  dos elementos dos bordos da laje. Assim, o ajuste da curva teórica à curva experimental foi realizado por tentativa e erro, admitindo-se um desvio máximo, entre os valores experimentais e os valores teóricos determinados, de 2%.

Neste ponto interessa especificar o conceito de ajustamento da curva teórica à curva experimental, e em particular, o ajustamento ao ponto de fissuração. Ou seja, neste ponto, o ajuste deve respeitar três aspectos: a fase elástica, a fase de fissuração e o próprio ponto de fissuração. Neste caso, junto do ponto de fissuração, como se verificará adiante, existem algumas diferenças entre as duas curvas, na medida em que, ou as cargas teóricas são relativamente superiores para o mesmo deslocamento, ou o deslocamento teórico é inferior para o mesmo nível de carga. De qualquer modo, na curva teórica, o ponto de fissuração é avaliado seguindo a mesma metodologia anterior. De seguida, o desvio dos resultados é avaliado usando a Equação (4.1) e a Equação (4.2).

$$\left| \frac{P_{cr,teor} - P_{cr,exp}}{P_{cr,exp}} \right| \quad (4.1)$$

$$\frac{|d_{cr,teor} - d_{cr,exp}|}{d_{cr,exp}} \quad (4.2)$$

Na Tabela 4.2 são apresentados, para esta laje os valores teóricos e os desvios correspondentes relativamente aos experimentais, no ponto de fissuração, sendo que o valor de  $P_{cr}$  e o de  $d_{cr}$  experimentais desta laje tomam os valores 16,6 kN e 5,07 mm, respectivamente. Nesta tabela,  $T_{cr}$  indica o momento torsor do elemento de largura  $b$  e  $\theta_{cr}$  a rotação por unidade de comprimento. O valor mínimo assumido para  $b$  foi de 0,21m, uma vez que se pensou não aproximar o resultado de uma quantidade próxima da altura  $h$  da laje. O valor máximo de 0,525m permite analisar uma gama de valores até cerca de  $3,5h$ .

Tabela 4.2 – Valor dos esforços e das deformações para a Laje New3.

$b$ [m]	$T_{cr}$ [kNm]	$P_{cr}$ [kN]	Desvio	$\theta_{cr}$ [rad.‰]	$d_{cr}$ [mm]	Desvio
0,35	2,66	16,5	0,8%	0,850	5,06	0,2%
0,21	1,60	16,5	0,8%	0,859	5,00	1,2%
0,2625	1,96	16,5	0,8%	0,842	5,12	1,1%
0,30	2,32	17,0	2,2%	0,848	5,16	1,8%
0,42	3,21	16,5	0,8%	0,871	5,04	0,5%
0,525	3,80	16,5	0,8%	0,845	5,11	0,9%

Globalmente, nota-se que o critério definido para o desvio máximo ser de 2% foi cumprido em todos os ajustes, dos valores teóricos aos experimentais, que se fizeram. De salientar que os incrementos de carga definidos para a análise não linear foram de 0,5 kN, pelo que a carga de fissuração dada pelo programa ANL só poderia ser 16,5 ou 17 kN. O desvio que daqui resulta terá que ser aceite.

Na Figura 4.3 mostra-se o gráfico contendo duas curvas, a dada pelo programa ANL e a experimental, referentes ao exemplo  $b=0,35$ m, que foi a largura para a qual se conseguiu o ajuste com menor desvio. Nesta figura são ainda indicadas as correspondentes posições dos pontos de fissuração, o teórico a azul e o ponto experimental a verde.

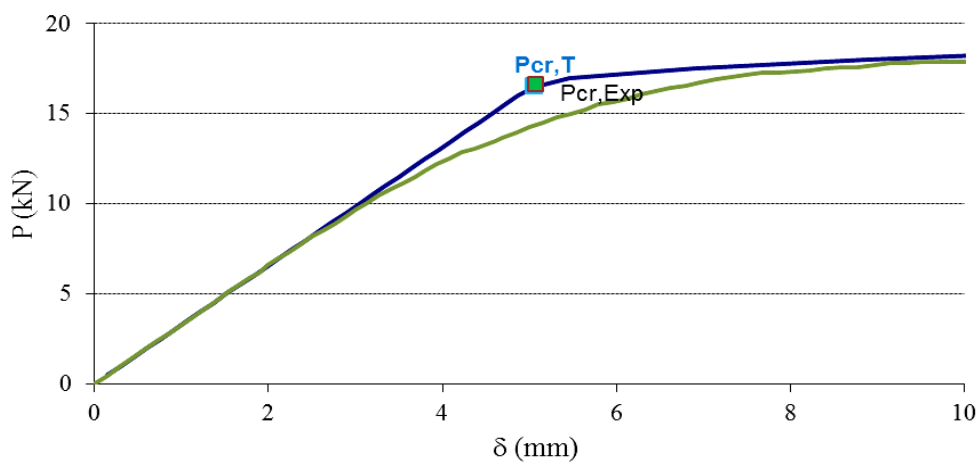


Figura 4.3 – Ajuste da curva teórica à curva experimental no ponto de fissuração,  $b=0,35\text{m}$ .

De seguida também se mostra na Figura 4.4 O gráfico que contém as duas curvas, experimental e a teórica, referentes ao  $b=0,30\text{m}$ , que foi a largura para a qual o desvio foi maior. Pode ver-se as posições do ponto de fissuração teórico a azul e o experimental a verde.

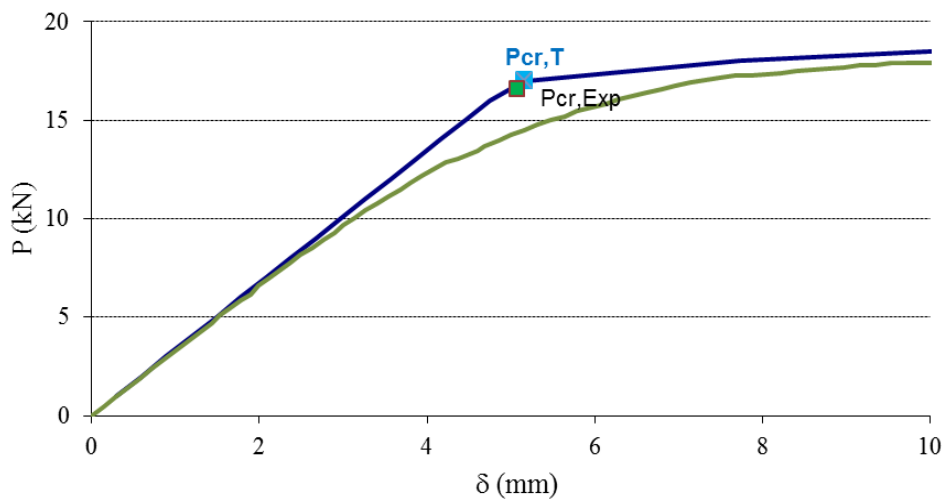


Figura 4.4 – Ajuste da curva teórica à curva experimental no ponto de fissuração,  $b=0,30\text{m}$ .

De realçar que o ponto de fissuração experimental, segundo (Rodrigues, 2011), foi calculado como sendo o ponto de intersecção entre a tangente à curva na fase elástica e a tangente à

curva na segunda fase, não linear devido ao esbatimento que a curva experimental sofre aquando da transição entre uma fase e outra.

Tendo em conta o descrito acima e a tabela de resultados referentes ao ajuste e os desvios respectivos, pode resumir-se a influência que o parâmetro  $b$  tem, quer no momento de fissuração  $T_{cr}$ , quer na rotação unitária por metro de comprimento  $\theta_{cr}$ . Os gráficos das Figuras 4.5 e 4.6 ilustram essa influência.

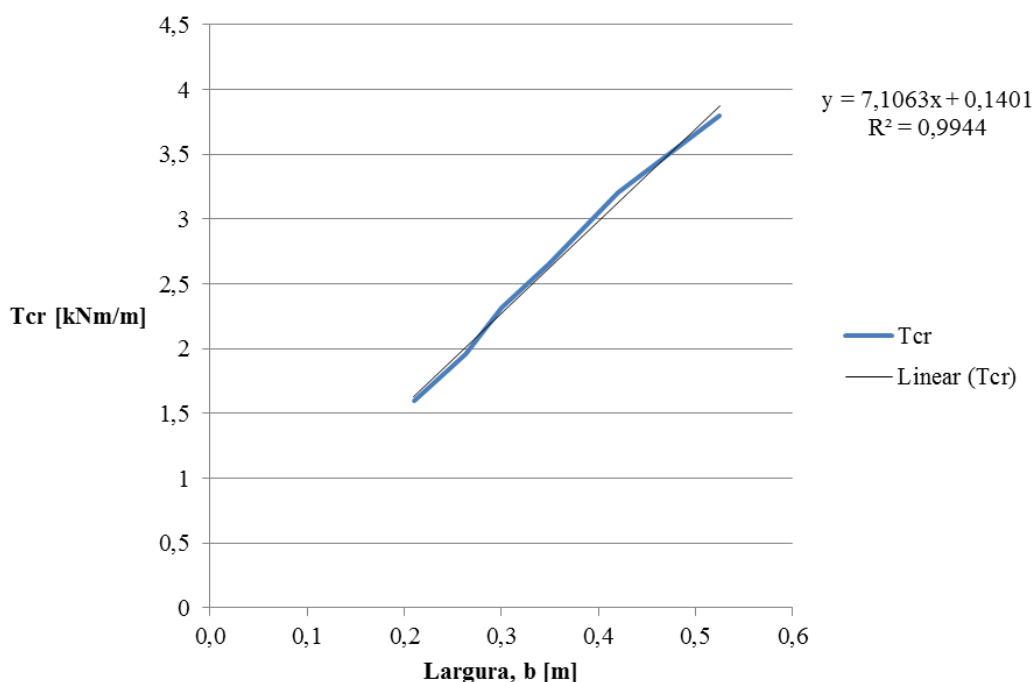


Figura 4.5 – Variação do momento de fissuração relativamente ao parâmetro  $b$ .

Como se pode verificar na figura anterior, a função  $T_{cr}$  varia, aproximadamente, de forma linear relativamente ao parâmetro  $b$ . Este resultado, esperado, confirma os resultados apurados por diversos autores, inclusive no caso da torção de vigas isoladas (Hsu, 1984) e (Bernardo, 2003) mencionados em (Pontes, 2009), ou ainda no âmbito da flexão de vigas (Barros e Figueiras, 2010).



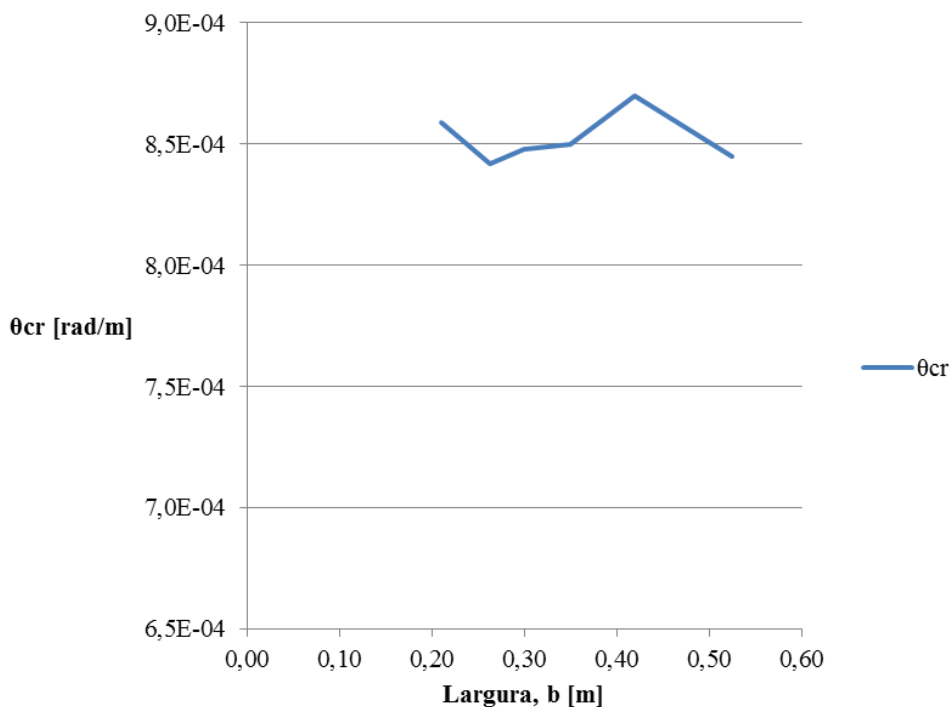


Figura 4.6 – Variação da rotação unitária de fissuração relativamente ao parâmetro  $b$ .

O resultado do gráfico acima também é o esperado: a rotação unitária de fissuração manteve-se praticamente constante ao longo da variação do parâmetro  $b$  i.e. revela-se ser um valor independente da largura que se assuma para as vigas do modelo de grelha para simulação da laje em causa. O valor médio é de  $8,52E-4$  rad/m. Importa no entanto referir que esta rotação unitária é um valor médio determinado para uma laje de altura  $0,154$  m.

#### 4.2.2 Extensão média de fissuração

Perseguindo ainda a avaliação da influência da quantidade de betão, definida através dos parâmetros geométricos, no pretendido ponto de fissuração, tornou-se necessário a avaliação da extensão média de fissuração  $\varepsilon_{cr}$ . Isto porque, a nível experimental, os resultados disponíveis, e apresentados anteriormente, correspondem basicamente à mesma altura  $h$  de laje. Ora, assim sendo, não é possível utilizar uma metodologia semelhante ao que se fez para o parâmetro  $b$ . A metodologia, então, adoptada consiste nos seguintes passos:

- Modelar as várias lajes, das quais se possui resultados experimentais (Menoita, 2010), (Ferreira, 2011) e (Rodrigues, 2011), através de elementos de área no programa SAP 2000;

- Aplicar a carga de fissuração, obtida experimentalmente, como carga uniformemente distribuída, no elemento de área correspondente ao ponto de actuação da carga a nível experimental;
- Considerar, no SAP 2000, o peso próprio da laje na análise das tensões;
- A partir do diagrama de tensões máximas actuantes na face traccionada da laje, obter o valor máximo da tensão em cada elemento, como sendo a média das tensões nos quatro nós de cada elemento de área;
- Calcular a extensão máxima de cada laje, que corresponde ao valor experimental da extensão para a qual a laje apresentou as primeiras fissuras.

Esta metodologia carece de diversas justificações. Em primeiro lugar, importa recordar que se assume como adequados os resultados determinados pelo programa SAP 2000 para a fase elástica, o que se demonstrou no subcapítulo 4.1 Para além disso, realça-se o facto de se ter considerado agora o peso próprio na análise, o que não tinha sido feito anteriormente. Este aspecto não pode ser ignorado uma vez que as extensões de tracção originadas pelo peso próprio são substanciais quando comparadas com as originadas pela carga  $P_{cr}$ . Por exemplo, esta parcela das extensões provoca variações significativas nas extensões obtidas entre as lajes de dimensões  $2,1 \times 2,1\text{m}^2$  e as de dimensões  $2,8 \times 2,8\text{m}^2$ . De salientar que no ponto anterior, não foi considerado o peso próprio da laje na avaliação dos diagramas  $P-d$ , uma vez que os resultados experimentais correspondentes também não o consideravam. Para além disso, e isso é que importa, as conclusões mantêm-se.

De referir que esta metodologia, mostrou-se bastante expedita uma vez que se usaram os mesmos modelos de lajes do SAP 2000, que foram previamente usados para cálculo da rigidez elástica. Uma outra particularidade da metodologia adoptada prende-se com a zona onde se obtiveram as tensões máximas. Assim, e de modo a se evitarem as perturbações dos campos de tensões juntos dos apoios, resultantes do artifício utilizado para a sua modelação, a zona onde se consideraram as tensões, para obtenção do valor máximo, foi a assinalada a vermelho na Figura 4.7 Nesta figura, são visíveis as perturbações do campo de tensões junto ao apoio do canto oposto à carga, o qual deveria ser semelhante à da zona da carga (canto assinalado a vermelho).

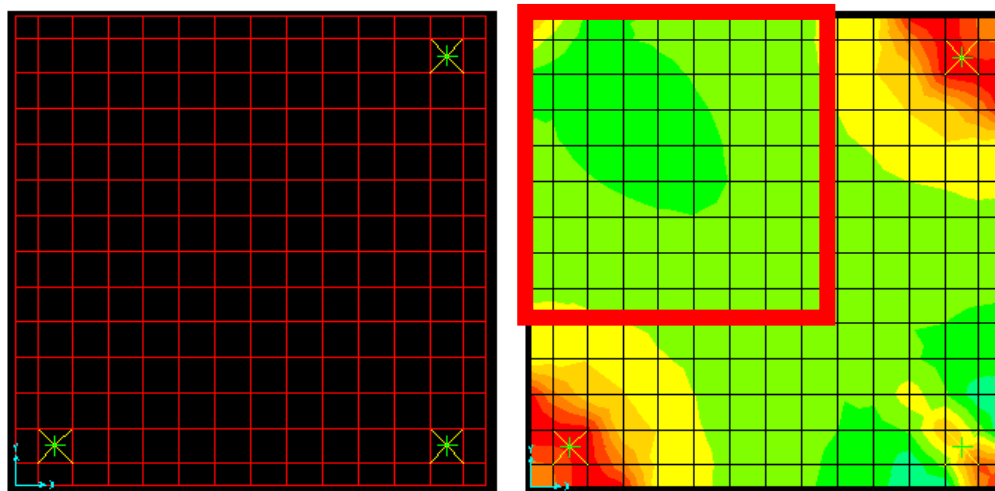


Figura 4.7 – Modelo e campo de tensões máximas num exemplo SAP 2000 de laje.

De seguida, apresentam-se, na Tabela 4.3 os resultados obtidos para as tensões máximas, módulo de elasticidade e extensões de fissuração, de cada uma das lajes testadas.

Tabela 4.3 – Tensões e extensões máximas elementares nos pontos de fissuração.

Laje	$\sigma_{max}$ [kPa]	$E_{cm}$ [GPa]	$\varepsilon_{cr}$ [‰]
New 3	3389	30,7	0,110
Old 3	3121	31,9	0,098
M2	2653	27,7	0,096
M3	2805	27,7	0,109
M4	3019	27,7	0,101
M5	3032	27,7	0,109
M6	2633	27,7	0,095
M7	2808	27,7	0,101
M8	2818	27,7	0,102
PF2	3036	30,2	0,101
PF3	3295	28,9	0,114
PF4	3194	29,0	0,110

O valor médio do módulo de elasticidade foi calculado segundo a Equação (4.3), proposta e definida em (CEN, 2004):

$$E_{cm} = 22 \left[ (f_{cm}) / 10 \right]^{0,3} \quad (4.3)$$

De uma forma geral, os resultados obtidos para a extensão de fissuração são bastante próximos. De acordo com (Ferreira, 2011), no caso da torção, o valor médio para a extensão de fissuração situava-se algures próximo de 0,09 ‰, pelo que se pode depreender que os valores obtidos e apresentados acima são coerentes com essa hipótese, tida como uma referência inicial nesta fase de análise do ponto de fissuração. No gráfico da Figura 4.8 que se segue, é visível a concentração dos valores das extensões de fissuração à volta de 0,1 ‰ a 0,11 ‰.

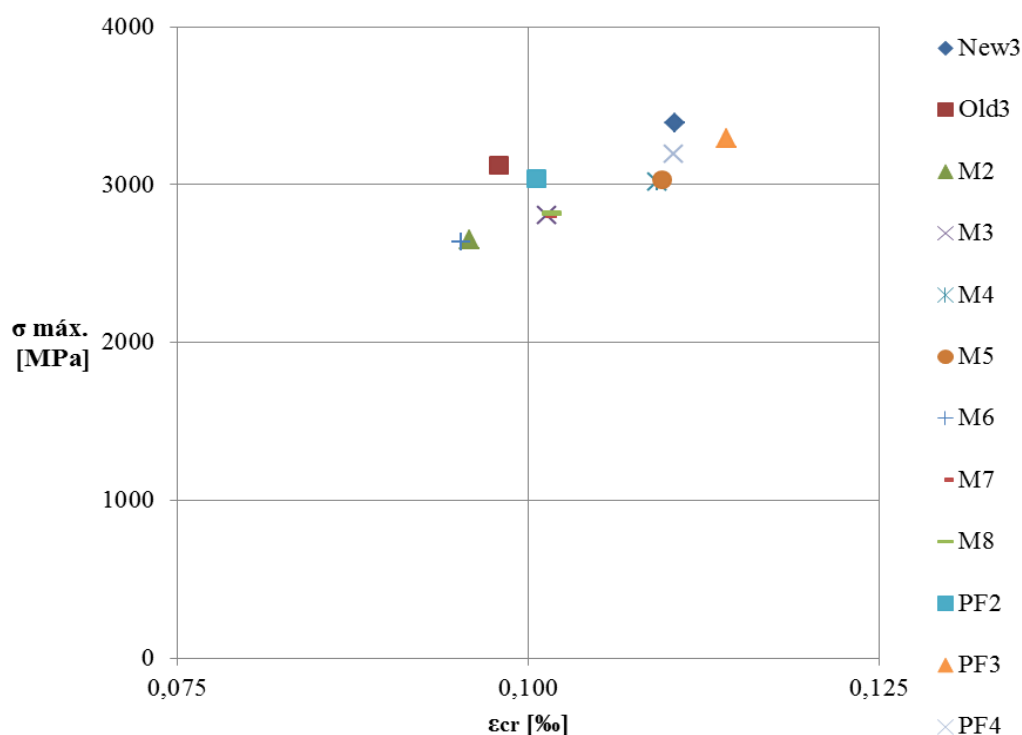


Figura 4.8 – Valores das tensões e das extensões experimentais no ponto de fissuração.

Desta forma, após obtenção dos resultados, calculou-se o valor médio para a extensão no ponto de fissuração  $\varepsilon_{cr}=0,104\text{‰}$ .

A vantagem de se ter calculado a extensão média de fissuração consiste em dispor de um valor de referência que permite definir qual a carga de fissuração, bem como o deslocamento de fissuração, recorrendo ao programa SAP 2000, nomeadamente no contexto do parâmetro  $h$ .

### 4.2.3 Parâmetro $h$

Pretende-se neste ponto descortinar a variabilidade do ponto de fissuração com a altura  $h$  da laje. Para o efeito, o valor da extensão de fissuração, os dados da laje com extensão de fissuração mais próxima da extensão média, conjuntamente com o programa SAP 2000, onde se assume o comportamento em fase elástica da laje, e o programa ANL, serão os dados de partida. Assim, a metodologia usada pode ser resumida do seguinte modo:

- Usar a modelação dessa laje no programa SAP 2000, variando a altura;
- Para duas cargas arbitrárias  $P_{1SAP}$  e  $P_{2SAP}$ , obter as respectivas tensões máximas actuantes;
- Calcular as extensões,  $\varepsilon_{1SAP}$  e  $\varepsilon_{2SAP}$  referentes a essas tensões máximas dadas por cada uma das cargas arbitrárias;
- Definir a carga de fissuração  $P_{cr}$  por interpolação entre as duas cargas arbitrárias,  $P_{1SAP}$  e  $P_{2SAP}$ , através da equação:

$$P_{cr} = \frac{(P_2 - P_1)(\varepsilon_{cr} - \varepsilon_1)}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} + P_1 \quad (4.4)$$

- Determinar o deslocamento de fissuração  $d_{cr}$ , correspondente;
- Calcular momento torsor  $T_{cr}$  e a rotação unitária  $\theta_{cr}$  correspondentes, utilizando o programa ANL.

Para a obtenção do valor médio da extensão de fissuração, considerou-se o peso próprio da laje porque o fenómeno físico de fissuração da laje, na realidade, é devido à soma de duas parcelas: à acção devido à carga aplicada conjuntamente com a acção do peso próprio da laje. Para esta fase da análise, a carga de fissuração  $P_{cr}$ , para cada altura  $h$  da laje, é determinada através da extensão de fissuração assumida. Tendo em conta que no programa SAP 2000 são aplicadas cargas, a carga  $P_{cr}$  resulta de uma interpolação efectuada entre duas extensões devidas a tensões máximas provocadas por duas cargas arbitrárias  $P_1$  e  $P_2$ . Caso, esta carga  $P_{cr}$  fosse adicionada ao peso próprio da laje, levaria ao aparecimento das primeiras fissuras. Ou seja, para o ajuste das curvas do programa ANL às curvas obtidas pelo programa SAP 2000 e definidas pela carga de fissuração  $P_{cr}$  e o respectivo deslocamento  $d_{cr}$ , não foi considerado o peso próprio. Uma vez que no programa ANL não se considerou o peso próprio associado à laje em causa, a curva P-d obtida pelo SAP 2000 segue, assim, o mesmo preceito que a curva obtida pelo ANL, de modo que o ajuste se torna válido e fiável para a definição da função  $T_{cr}(h)$  e da função  $\theta_{cr}(h)$ .

Para o que se segue, recorreu-se à Laje M3, que é a laje que possui uma extensão de fissuração mais próxima da extensão média de fissuração. Assim sendo, foram definidos cinco valores de alturas, que são usuais na prática corrente, para lajes maciças, que são: 0,12m, 0,154m (altura real da Laje M3), 0,18m, 0,20m e por último 0,25m. Na Tabela 4.4 apresentam-se os valores das cargas de fissuração e respectivos deslocamentos, que se apuraram, no programa SAP 2000, para cada uma das referidas alturas.

Tabela 4.4 – Cargas e deslocamentos de fissuração em função do parâmetro  $h$ .

Alturas da Laje M3	$P_{cr,SAP}$ [kN]	$d_{cr,SAP}$ [mm]
0,12m	11,8	3,9
0,154m	21,4	3,4
0,18m	30,2	3,0
0,20m	37,9	2,8
0,25m	61,0	2,3

Como seria de esperar, à medida que se aumenta a espessura da laje, a carga de fissuração aumenta e o deslocamento respectivo diminui.

Definidos os pontos de fissuração para cada uma das alturas analisadas, tem-se um conjunto de resultados que servem de referência para o ajuste das curvas teóricas dadas pelo programa ANL. O ajuste das curvas ANL às curvas definidas pelos pontos acima apresentados, calculados pelo programa SAP 2000, permite a avaliação do momento torsor de fissuração  $T_{cr}$ , e a rotação unitária de fissuração  $\theta_{cr}$ , ambos em função da altura da laje. O ajuste foi feito mediante um critério de controlo do desvio de uma curva em relação à outra. Tratando-se da fase elástica linear, o critério de desvio máximo estipulado foi de 2%. Assim, apresentam-se os desvios dos valores dados pelo ANL relativamente aos valores determinados pelo SAP 2000, que como pode ser visto, não ultrapassaram os 2% previamente estipulados.

Após a análise dos resultados obtidos e concluído o ajuste entre as curvas do ANL e as curvas do SAP 2000, passa-se à análise das relações entre o momento torsor de fissuração, a rotação unitária de fissuração e o parâmetro  $h$  da laje. O momento torsor de fissuração, apresentado na Tabela 4.5, à semelhança do que aconteceu com a carga de fissuração, não considera o efeito do peso próprio. Ou seja, para as cargas de fissuração  $P_{cr}$ , determinadas para a laje, obtiveram-se os respectivos momentos torsos de fissuração  $T_{cr}$ . Acontece que, ao se efectuar o estudo teórico do fenómeno de lajes de BA submetidas a esforços de torção, não só não é

possível ignorar o efeito da gravidade, como ainda se pretende chegar a uma definição do comportamento que sirva para o dimensionamento na prática de Engenharia Civil.

Tabela 4.5 – Valores representativos do ajuste da curva teórica ANL.

$h$	$T_{cr,ANL}$ [kNm/m]	$P_{cr,ANL}$ [kN]	Desvio	$\theta_{cr}$ [rad]	$d_{cr, ANL}$ [mm]	Desvio
0,120m	1,81	12,0	1,5%	0,00125	3,9	0,2%
0,154m	3,23	21,5	0,4%	0,00108	3,4	0,9%
0,180m	4,50	30,0	0,6%	0,00092	2,9	0,2%
0,200m	5,71	38,0	0,2%	0,00086	2,7	0,3%
0,250m	9,70	61,0	0,0%	0,00077	2,3	0,0%

Posto isto, surgiu a necessidade de englobar na análise, da relação entre o momento torsor de fissuração e a altura, o efeito do peso próprio da laje, para que se chegue a uma relação que seja genérica e que leve em conta a contribuição do peso volúmico do material BA. Assim, o que se fez foi calcular pelo programa SAP 2000, o momento torsor máximo devido apenas à solicitação do peso próprio. Somou-se esta parcela devida ao peso próprio à parcela devida à carga de fissuração determinada anteriormente, tendo em atenção as larguras dos elementos. Desta forma, o que se procurou obter foi a relação que o momento torsor de fissuração, considerando o efeito do peso próprio, tem com a altura da laje.

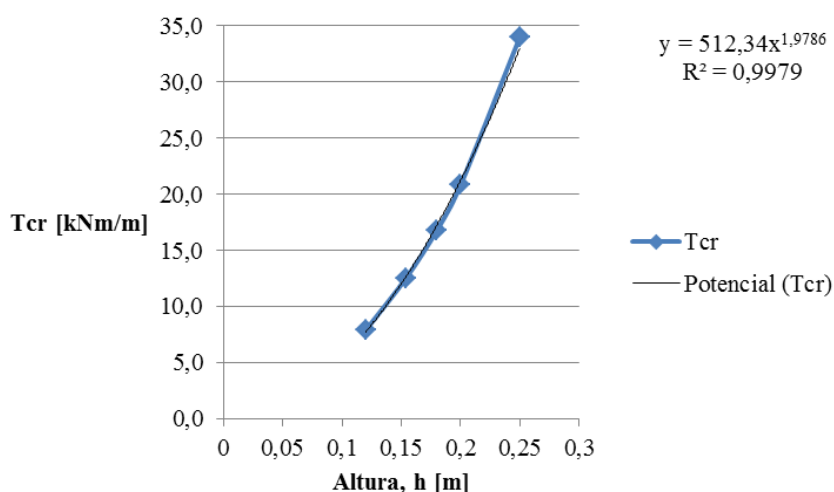


Figura 4.9 – Variação do momento de fissuração  $T_{cr}$  com a altura  $h$ .

Na Figura 4.9 é possível ver-se, graficamente, a relação que o momento torsor de fissuração  $T_{cr}$  tem com o parâmetro  $h$ , relativo à altura da laje. Nota-se o aumento do momento com o aumento da altura, seguindo uma relação aproximadamente quadrática.

Quanto à rotação unitária de fissuração, da Figura 4.10, pode concluir-se que a relação entre a rotação e a altura é, praticamente, inversamente linear. E assim sendo, utilizando a média dos valores obtidos para  $\theta_{cr} \cdot h$ , pode dizer-se que a relação entre a rotação unitária e a altura é expressa pela equação:

$$\theta_{cr} = 1,69 \cdot 10^{-4} / h \quad (4.5)$$

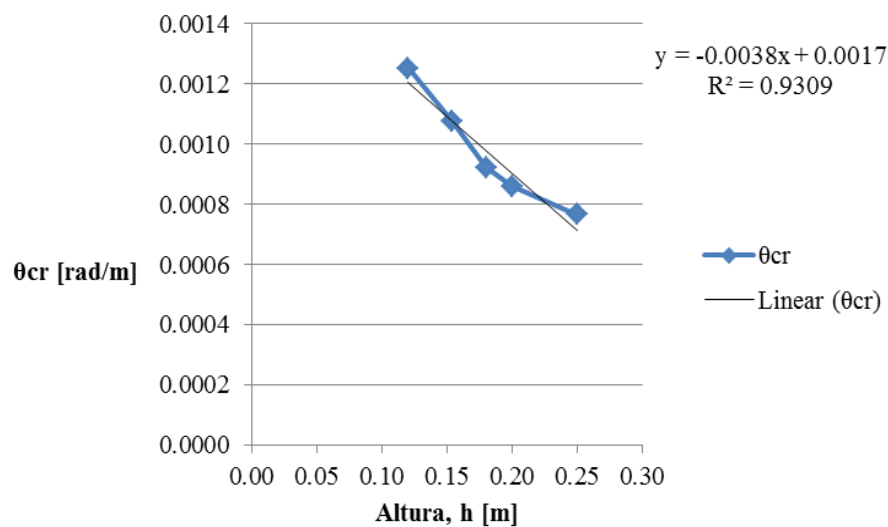


Figura 4.10 – Variação da rotação unitária  $\theta_{cr}$  com a altura  $h$ .

Recorrendo ao exemplo da Laje M3 e resolvendo a Equação (2.3) em função de  $\chi_{cr} \cdot h$ , a constante que se obtém toma valor  $1,43 \cdot 10^{-4}$ . De realçar, que este valor obtido depende do valor da tensão de rotura do betão à tracção  $f_r$ , e do módulo de elasticidade  $E_c$ . Conclui-se, então, que este valor é maior que o obtido com a análise efectuada no presente trabalho, significando que a teoria de (Marti & Kong, 1987) determina um ponto de fissuração cuja rotação unitária é maior que a dada pela teoria proposta neste Capítulo. Adiante mostra-se que, de facto, ocorre precisamente o fenómeno contrário.

Convém referir que as rotações unitárias de fissuração, que se apresentaram neste subcapítulo, referem-se somente à carga de fissuração que se determinou no SAP 2000. Ou seja, se para este parâmetro se quisesse apresentar o valor do mesmo que considerasse o efeito do peso próprio, bastaria fazer uma proporção, uma vez que se está na fase elástica linear do diagrama T-θ.



### 4.3 Momento reduzido de fissuração

Na sequência das análises anteriormente descritas, ficou definida a influência da quantidade de betão, através dos parâmetros geométricos  $b$  e  $h$ , na resistência à torção até se atingir o ponto de fissuração. Quanto à qualidade do betão, representada, neste caso, pelo valor médio de resistência à tracção  $f_{ctm}$ , a influência sobre a resistência à torção não pôde ser analisada, nem tão pouco definida e comprovada, por ausência de resultados experimentais em que se tenha variado este parâmetro, e que sirvam de referência. Ora, consequentemente, o que se fez foi definir uma hipótese de relação entre o  $f_{ctm}$  e o momento tursor de fissuração, baseada nos fenómenos que ocorrem no BA já conhecidos, como é caso da compressão, da flexão e da tracção pura. O que se conhece bem, sobre a relação entre o esforço resistente e a qualidade do betão, na presença destes fenómenos, é que existe proporcionalidade directa entre estes. Aliás, sabe-se que em fenómenos de solicitação de torção, ao longo da peça, há o desenvolvimento de isostáticas de compressão e isostáticas de tracção (Dias da Silva, 2004) e que o ponto que se pretende definir é o da fissuração, pelo que a resistência que interessa é claramente a de tracção. Assim que surgem as primeiras fissuras, perpendiculares às isostáticas de tracção, já se terá atingido o ponto de fissuração, pelo que se assume essa relação de proporcionalidade directa a fim de se prosseguir o estudo até à definição do ponto de fissuração.

Definidas as relações entre os vários parâmetros representativos da qualidade e da quantidade de betão e o momento de fissuração, torna-se necessário reunir essas relações de forma a tornar claro o modo de tratar, com sentido prático, o fenómeno em estudo: torção em lajes de BA. Numa situação de projecto real, procura-se saber qual o ponto de fissuração, tendo em conta as dimensões e a geometria da laje em causa, bem como a resistência da mesma, para que a análise do correspondente comportamento não seja condicionada pela fissuração. As relações atrás explicitadas, levam a uma função, do momento tursor de fissuração dependente de três variáveis. E as relações com essas variáveis ( $b$ ,  $h$  e  $f_{ctm}$ ) acabam por ser, de certa forma, independentes entre si.

Neste ponto, surgiu a necessidade em se propor um momento tursor reduzido de fissuração  $\mu_{Tcr}$ , à semelhança do que acontece com a resistência de secções sujeitas a flexão, para que se pudesse reunir as relações todas num único parâmetro adimensional que fosse intuitivo e fácil de se trabalhar. Isto porque, como foi feito nos subcapítulos anteriores, a fissuração devida a uma solicitação de torção, pode ser resolvida se se trabalhar com a respectiva extensão de forma a se prever qual a carga que provocará a fissuração. Porém, num sentido prático de dimensionamento, torna-se pouco expedito esse procedimento. Desta forma, resumem-se os estudos paramétricos feitos nos pontos anteriores através do parâmetro  $\mu_{Tcr}$  que foi definido tendo em conta as relações que se extraíram das análises feitas, nomeadamente entre o

momento de fissuração e o  $b$ , o  $h$  e o  $f_{ctm}$ . A equação que se propõe, para o momento torsor de fissuração reduzido, é a seguinte:

$$\mu_{Tcr} = \frac{T_{cr}}{b \cdot h \cdot f_{ctm}} \quad (4.6)$$

Onde  $T_{cr}$  é o momento torsor de fissuração em kNm,  $b$  é a largura assumida para as vigas em metros,  $h$  a altura da laje em causa, em metros, e  $f_{ctm}$ , o valor médio da resistência do betão à tracção, em kPa.

Assumindo a equação proposta acima, tornou-se necessário avaliar o valor de  $\mu_{Tcr}$ , utilizando para o efeito os vários resultados experimentais disponíveis. A metodologia seguida consistiu então em utilizar os resultados das Lajes M2, M3, M5, M6, M7 e M8, bem como das Lajes New3, Old3, PF1, PF2, PF3, PF4 e PF5.

Uma vez que anteriormente se recorreu ao ajuste das curvas dadas pelo ANL às curvas experimentais, ao longo da fase linear elástica, tem-se então, os valores dos momentos de fissuração,  $T_{cr,ANL}$ , para cada uma das lajes.

Tabela 4.6 – Valores do momento reduzido de fissuração

Laje	$f_{ctm}$ [MPa]	$\mu_{Tcr}$
M2	1.70	0.700
M3	1.70	0.742
M5	1.70	0.809
M6	1.71	0.689
M7	1.71	0.742
M8	1.71	0.743
New3	1.99	0.697
Old3	2.26	0.608
PF2	2.26	0.643
PF3	1.96	0.684
PF4	1.98	0.684

De realçar que os valores de momento torsor  $T_{cr}$ , são nada menos que a soma da parcela correspondente à carga de fissuração, determinada experimentalmente, e a parcela relativa à solicitação apenas do peso próprio. Isto surge devido à proposta da Equação (4.5) que tem por objectivo servir de referência para o cálculo numa situação de dimensionamento na prática de Engenharia Civil, pelo que a consideração do efeito do peso volúmico do material da laje, nomeadamente BA, é de extrema importância. Assim, o cálculo do parâmetro  $\mu_{Tcr}$ , é directo e simples, e são apresentados os valores obtidos na Tabela 4.6 acima.

A Figura 4.11 contém o gráfico que ilustra a dispersão dos valores apresentados na tabela acima. Nele é visível a nuvem de valores à volta do 0,7 à excepção de 4 lajes, que são a M5 que constitui um extremo máximo, e a Old3 que é o mínimo valor obtidos para o momento torsor reduzido de fissuração.

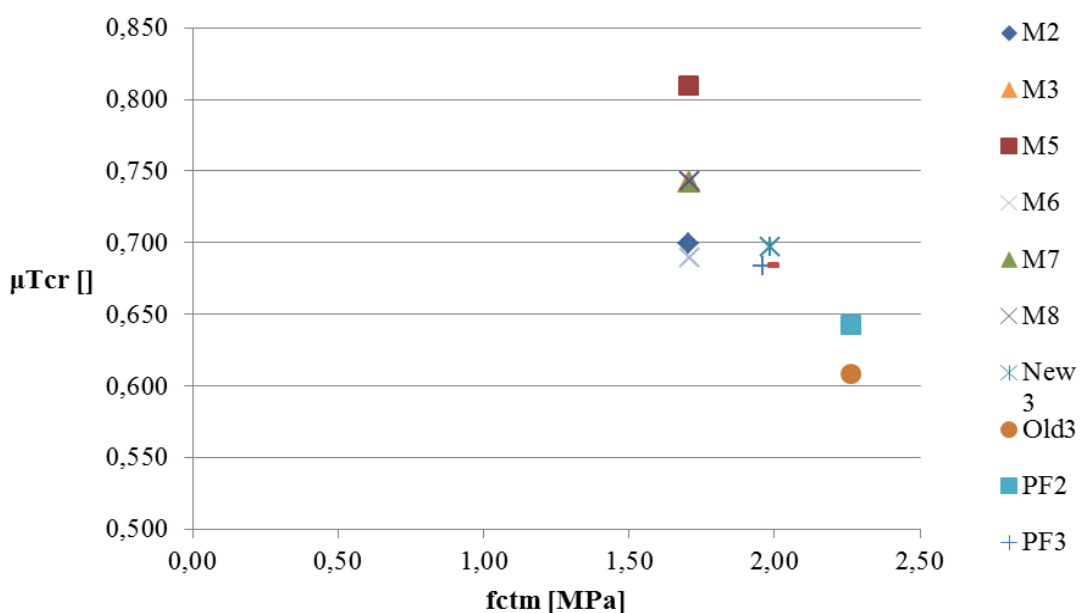


Figura 4.11 – Valores do momento reduzido de fissuração  $\mu_{Tcr}$ , em função de  $f_{ctm}$ .

Quanto à laje Old3, o facto de ter um  $\mu_{Tcr}$  relativamente baixo explica-se com o valor da carga de fissuração experimental que foi considerado. De facto, esta laje é a com maior idade de entre as outras todas e, conforme (Rodrigues, 2011), o diagrama P-d experimental apresentava uma carga superior para a fissuração do que a que foi considerada. Através da Figura 4.12, observa-se que a carga, no final da fase elástica linear, atingiu um pico antes de decrescer ligeiramente, já na segunda fase, não linear. Acontece que a metodologia usada para obtenção da carga de fissuração, em todos os resultados experimentais, foi de se considerar o ponto de intersecção entre as tangentes às fases elástica linear e não linear, como se pode ver pela

posição da carga de fissuração experimental, na Figura 4.12, assinalada a verde. Assim, para esta laje, caso se considerasse o valor do referido pico, ter-se-ia um  $\mu_{Tcr}$  maior.

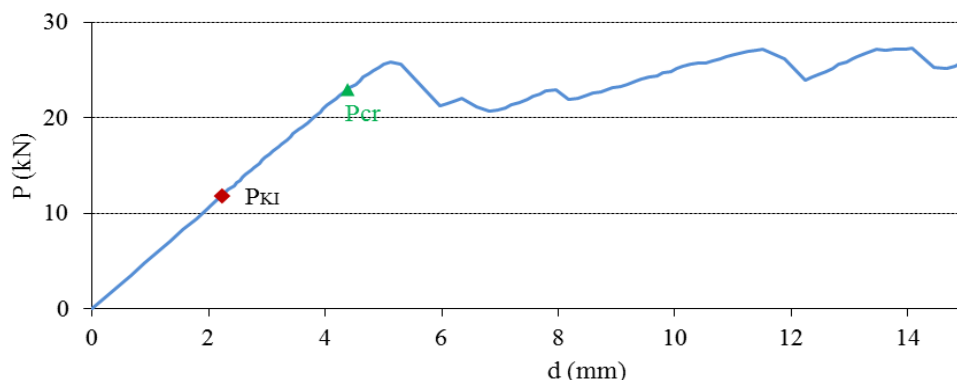


Figura 4.12 - Diagrama  $P-d$  experimental da Laje Old3, (Rodrigues, 2011).

Após a exclusão dos resultados da Laje Old3 também se exclui a Laje M5 por motivos estatísticos pois o desvio em relação ao valor da média dos restantes resultados é de cerca de 15%. O procedimento seguido foi o de se determinar a média dos restantes valores e defini-la como a referência a ser seguida numa situação real de projecto. A média tomou o valor de 0,71 e pode ser considerada um valor fixo, com o qual se poderá obter o momento torsor máximo a que se pode submeter uma laje, com a resistência, a geometria e as dimensões definidas, sem que haja fissuração.

Após a análise do momento reduzido de fissuração, faz-se agora uma comparação entre este e o valor correspondente apresentado em (Marti & Kong, 1987). Trabalhando a Equação (2.4), chega-se a um momento reduzido de fissuração de valor constante e igual a  $1/6$ . Recorrendo, uma vez mais, ao exemplo da Laje M3, cujas características já foram definidas anteriormente, o momento torsor reduzido de fissuração obtido com a Equação (2.4) toma valor 0,28 que é, aproximadamente, 70% superior ao valor, da relação tida como genérica e constante, de  $1/6$ .

## 5 PONTO DE CEDÊNCIA

Tal como referido anteriormente, o objectivo deste trabalho consiste em caracterizar o comportamento à torção de lajes maciças de BA, o qual pode ser descrito pelo diagrama elementar T- $\theta$ . Neste Capítulo pretende-se caracterizar a posição do ponto de cedência das armaduras, ou seja, o ponto que limita a segunda fase do comportamento, designada por fase de desenvolvimento das fissuras. De referir que no final deste Capítulo será apresentada uma relação entre a segunda fase do comportamento e a fase de plastificação e posterior rotura a fim de definir o ponto de carga máxima, completando assim a descrição do comportamento genérico de lajes de BA submetidas a torção.

Para a análise deste ponto de cedência, exclui-se o uso do programa SAP 2000, anteriormente usado, que somente contempla a fase elástica nas análises computacionais efectuadas. Manteve-se o modelo de grelhas com elementos de vigas, materializado no programa de análise computacional ANL\_Grelhas, apresentado no Capítulo 3, que, recorde-se, estando caracterizados os comportamentos das vigas, quer em flexão, quer em torção, permite efectuar uma análise incremental não linear do comportamento de lajes de BA.

Uma vez que nesta fase o betão já estará fissurado, acredita-se que seja o aço o parâmetro determinante para a caracterização da mesma, à semelhança de outros fenómenos no âmbito das peças de BA. A comprovação de que esta fase depende essencialmente da quantidade (dimensões) e da qualidade (resistência) do aço presente na laje, será o intuito da análise explicitada neste Capítulo 5. Importa referir que o ponto de cedência pode até nem ser atingido caso o betão comprimido ceda antes desse ponto, ou, como acontece normalmente nestes casos, a carga de resistência ao punçoamento seja inferior à virtual carga de cedência.

A análise, a comprovação da hipótese definida e as conclusões dependem, neste caso, dos resultados experimentais disponíveis. Para este ponto é de realçar que não existem resultados experimentais disponíveis obtidos no LEMEC do DEC. Pois, para esta fase, interessam resultados de ensaios onde se tenha variado a taxa de armadura  $\rho$ , e/ou o valor médio da tensão de cedência do aço  $f_{sym}$ , bem como a respectiva altura útil  $d$ . Considerando o programa experimental elaborado por (Marti et al, 1987), pôde-se trabalhar com os resultados retratados nesse artigo científico e ter, assim, um termo de referência para o estudo paramétrico teórico, a fim de se descortinar as relações que se querem comprovar.

## 5.1 Ajuste das curvas

Para se analisar e tratar a 2ª fase do comportamento de lajes sujeitas a torção, entre os pontos de fissuração e de cedência, tornou-se necessário definir o ajuste das curvas dadas pelo programa ANL às curvas experimentais obtidas em (Marti et. al, 1987). Uma das dificuldades encontradas para o referido ajuste foi o programa experimental ter sido retratado somente com alusão a cerca de sete pontos no diagrama carga-deslocamento  $P-d$ . Para além disso, o primeiro ponto, sugerido como sendo o ponto de fissuração, de facto é um ponto posterior ao início da fissuração, uma vez que o início da fissuração foi controlado visualmente. Outra das dificuldades encontradas correspondeu à definição do próprio ponto de cedência, uma vez que algumas das Lajes ensaiadas apresentaram rotura por punçoamento, antes mesmo de se atingir a cedência e posterior plastificação das armaduras. Adiante explicita-se a metodologia que foi usada para ultrapassar as dificuldades acima descritas, bem como os resultados a que se chegaram para a análise e definição do ponto de cedência.

### 5.1.1 Ponto de Fissuração

Para o que se segue, consideraram-se as Lajes ML2, ML3, ML6 e ML9, apresentadas no Capítulo 3. A largura utilizada, para as vigas do modelo de grelha, tomou valor  $b=0,15\text{m}$  para as vigas do bordo da laje e  $b=0,28\text{m}$  para as vigas internas. Esta diferença prende-se com o esquema estrutural dos ensaios experimentais, onde os apoios da laje eram fixos e dispostos a  $0,075\text{m}$  do bordo, assim como os actuadores de carga. Como dito anteriormente, os nós da malha da grelha são definidos para o ponto relativo ao meio da largura das vigas.

A definição do ponto de fissuração baseou-se então nas conclusões do Capítulo anterior. Assim, fazendo uso da Equação (4.5), estabeleceu-se o valor do momento torsor de fissuração, e a rotação de fissuração obtida pela Equação (4.4), tanto para as vigas internas como para as vigas externas, de cada uma das lajes. Na Tabela 5.1 apresentam-se os valores obtidos pelo programa ANL para o ponto de fissuração, referente às vigas internas, das Lajes ML2, ML3, ML6 e ML9.

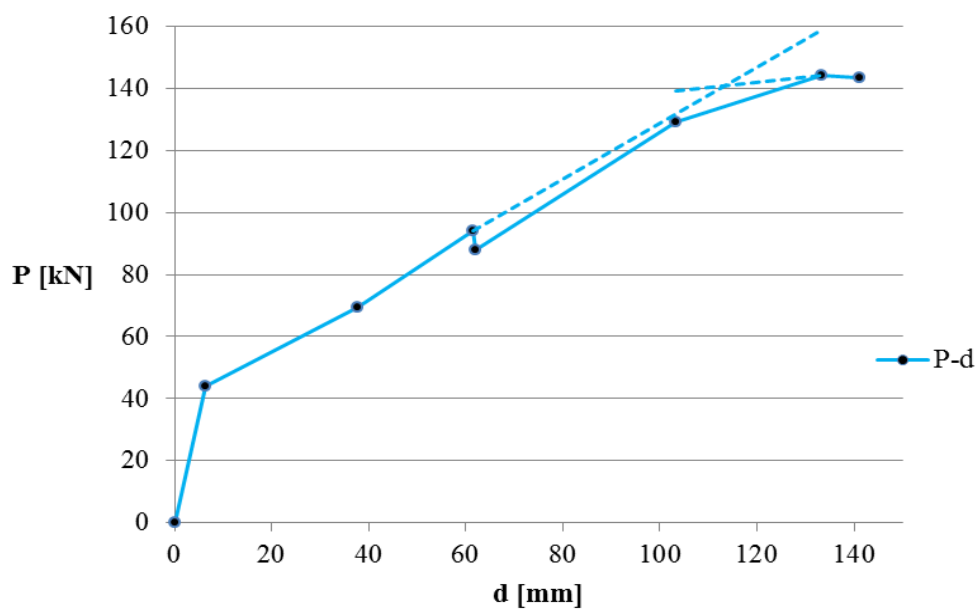
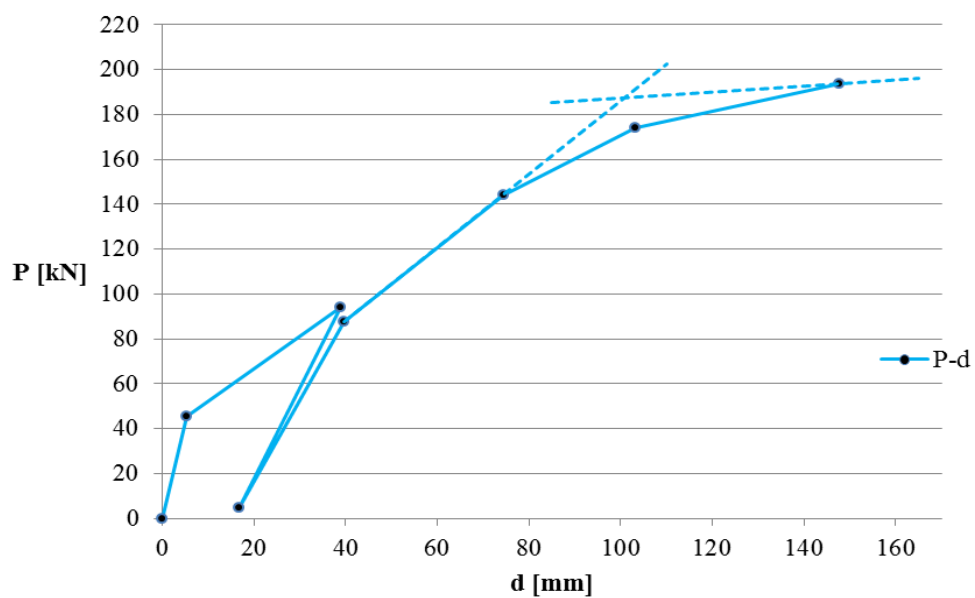
Tabela 5.1 – Cargas e flechas no ponto de fissuração das Lajes ML2, ML3, ML6 e ML9.

Laje	$P_{cr}$ [kNm/m]	$d_{cr}$ [mm]
ML2	47	1,7
ML3	44	1,4
ML6	29	1,4
ML9	52	1,4

### 5.1.2 Ponto de cedência

A definição de ponto de cedência, indica um ponto a partir do qual as armaduras entram em cedência delimitando a segunda fase do comportamento das estruturas de BA. Qualitativamente, no gráfico *P-d*, ocorre uma diminuição da rigidez estrutural semelhante à que sucede no ponto de fissuração.

Considerando os dados experimentais disponíveis, algumas lajes, nomeadamente a Laje ML2 e a Laje ML3, romperam por punçoamento, conforme descrito em (Marti et al, 1987). De acordo com o referido em (Martins, 2012), a rotura de lajes por punçoamento é considerada frágil e pode-se dar ainda antes de se atingir a cedência das armaduras, para taxas de armadura relativamente altas ( $\rho > 0,65\%$ ). De facto, nestas duas lajes, é possível ver que a trajectória da carga ainda se encontrava numa fase de progressão da fissuração (ver Figura 5.1 e Figura 5.2) quando se atinge o ponto de carga máxima e consequente rotura. Com isto conclui-se ter-se atingido a rotura antes de chegar ao ponto de cedência. Nas Figuras 5.1. e 5.2, referentes às curvas *P-d* experimentais das Lajes ML2 e ML3, são ainda indicadas as rectas assumidas para determinar o ponto de cedência, que a laje supostamente apresentaria, caso a rotura não fosse por punçoamento. Este procedimento pretende garantir a utilização destes resultados experimentais. A metodologia que se seguiu consistiu em se manter as diferenças entre os valores da rigidez dos segmentos sucessivos da curva experimental. Ou seja, a rigidez virtual associada à recta após o ponto de carga máxima, foi assumida como tendo um valor correspondente ao do último troço subtraído da diferença entre os dois últimos. Desta forma, o que se queria era manter a evolução do crescimento da curva experimental até se ter um patamar que indicasse, claramente, a plastificação das armaduras até à rotura. Este processo não pode deixar de se considerar como aleatório. No entanto, e perante a ausência do valor da carga máxima, caso não existisse punçoamento, permite ainda a utilização destes valores experimentais.

Figura 5.1 - Curva experimental  $P-d$  da Laje ML2.Figura 5.2 - Curva experimental  $P-d$  da Laje ML3.



## 5.2 Curvas Teóricas ANL

Pretende-se agora passar ao ajuste das curvas teóricas dadas pelo programa ANL, com o objectivo de avaliar e analisar a influência do aço na definição do ponto de cedência de lajes submetidas à torção.

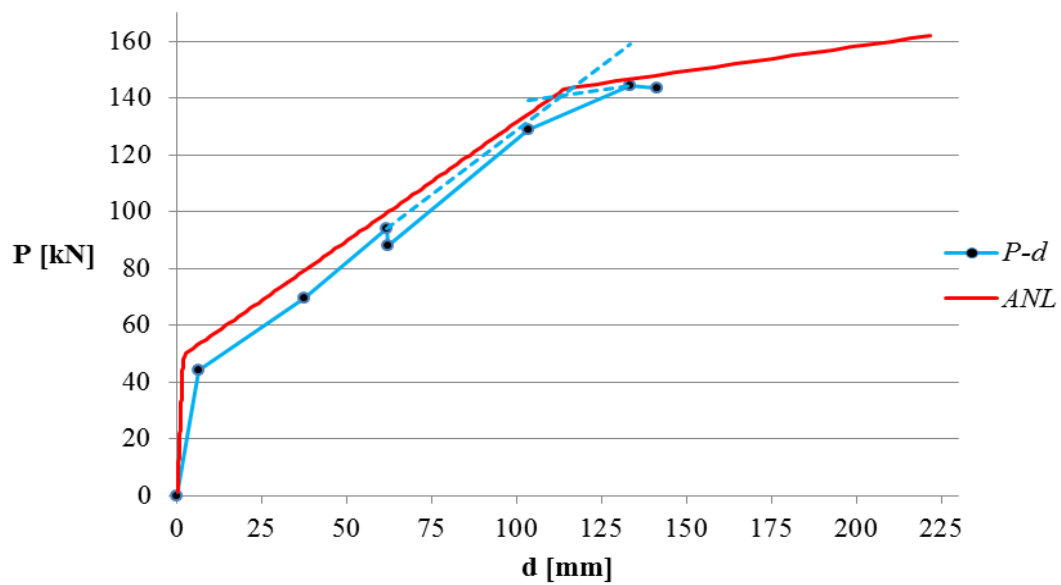
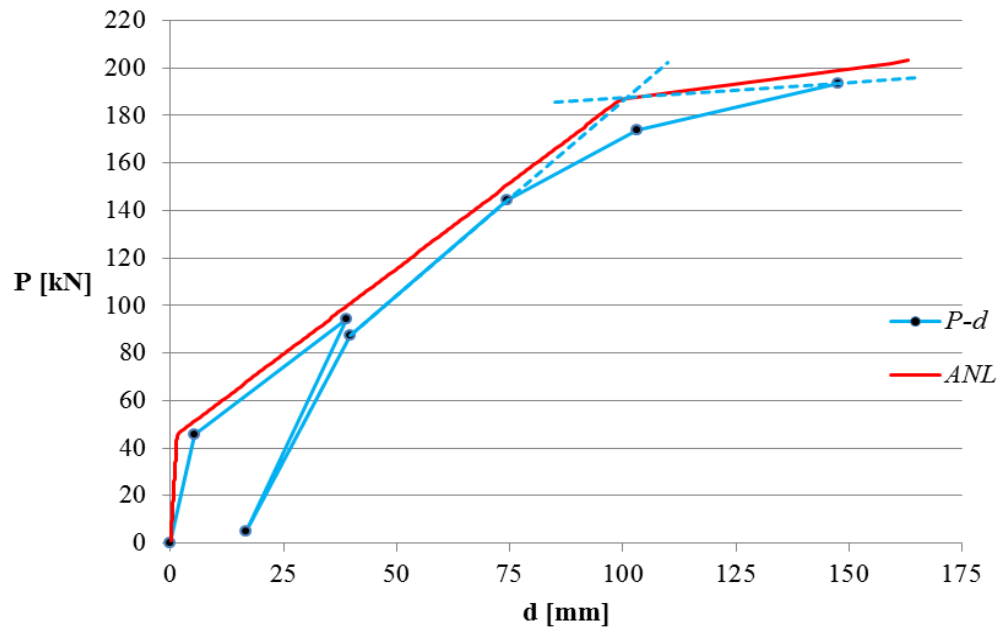
Para o ajuste da curva teórica à curva experimental, nesta 2ª fase não linear, foi necessário definir um critério de controlo dos desvios entre as curvas mencionadas. O desvio foi calculado através do quociente entre a diferença das áreas ocupadas pela curvas e a área ocupada pela curva experimental, no intervalo entre o primeiro deslocamento registado na curva experimental, e o deslocamento relativo ao ponto de cedência experimental assumido virtualmente. O critério de desvio máximo adoptado como aceitável, para o ajuste das curvas, foi de 10%.

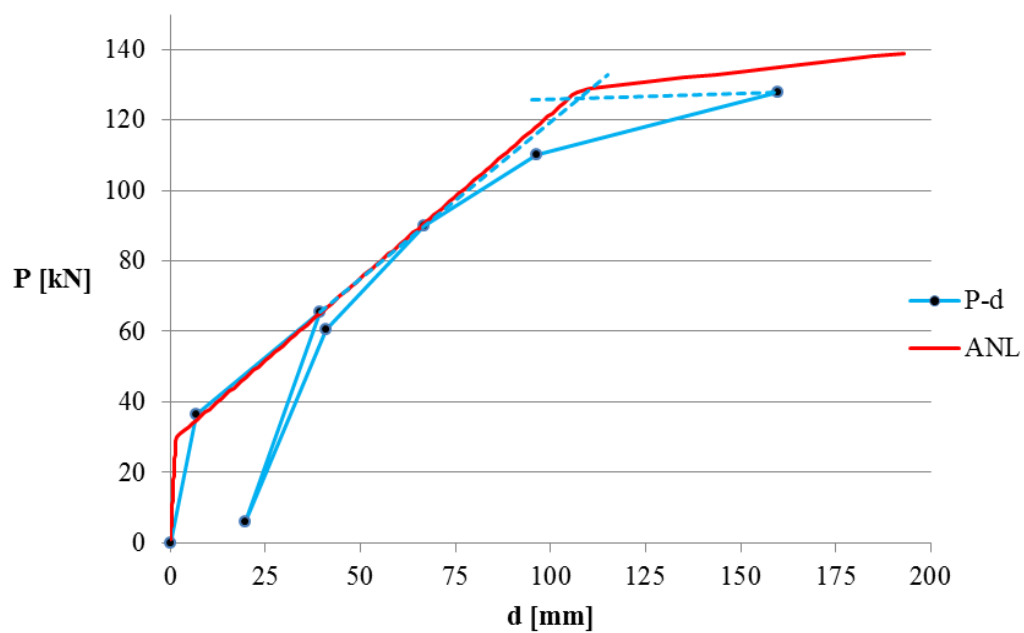
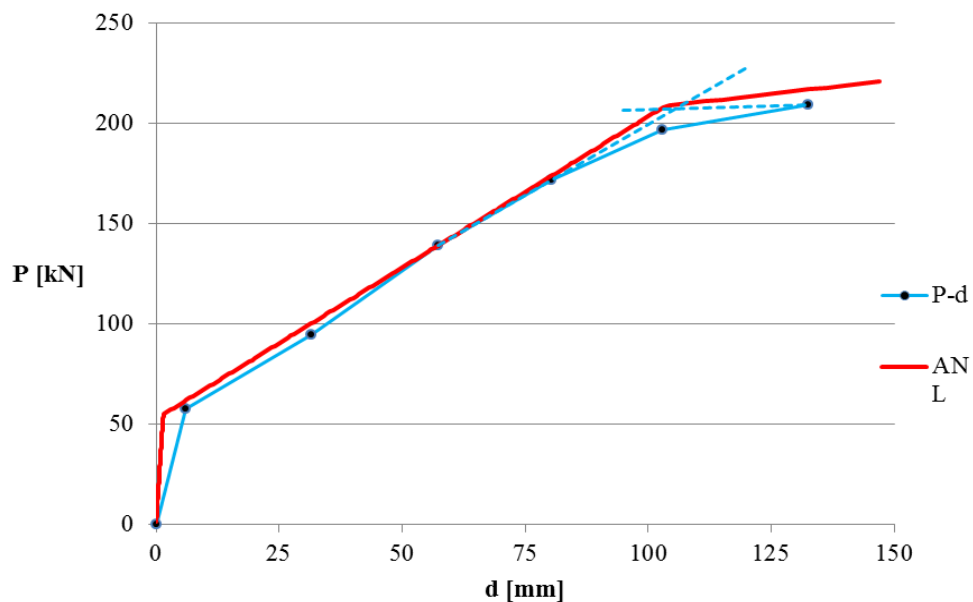
Para ajustar a curva ANL ao ponto de cedência determinado anteriormente em 5.1.2, seguiu-se a metodologia de tentativa e erro, cumprindo o critério de controlo de desvio estipulado. Na Tabela 5.2 apresentam-se os valores das cargas  $P_y$  e dos deslocamentos  $d_y$  determinados teoricamente para o ponto de cedência e, na 4ª coluna, os desvios alcançados.

Tabela 5.2 – Cargas e flechas no ponto de cedência das Lajes ML2, ML3, ML6 e ML9.

Laje	$P_y$ [kN]	$d_y$ [mm]	$ 1 - (A_{ANL}/A_{Exp.})  * 100\%$
ML2	141	116	7,7%
ML3	187	101	3,3%
ML6	126	107	2,9%
ML9	208	105	2,2%

De forma geral, pode ver-se que o critério de controlo do desvio foi cumprido, sendo o máximo desvio de 7,7% no ajuste da Laje ML2. Da Figura 5.3 à Figura 5.6 pode verificar-se, visualmente, o ajuste das curvas ANL às curvas experimentais e os respectivos desvios retratados na tabela acima.

Figura 5.3 - Curva experimental  $P-d$  e curva teórica  $ANL$ , da Laje ML2Figura 5.4 - Curva experimental  $P-d$  e curva teórica  $ANL$ , da Laje ML3

Figura 5.5 - Curva experimental  $P-d$  e curva teórica  $ANL$ , da Laje ML6Figura 5.6 - Curva experimental  $P-d$  e curva teórica  $ANL$ , da Laje ML9

Feito o ajuste das curvas ANL às curvas experimentais, tem-se a base definida para se passar à definição do ponto de cedência.

### 5.3 Momento reduzido de cedência

À semelhança do que foi feito para o ponto de fissuração no Capítulo anterior, tentou-se neste ponto definir a posição do ponto de cedência através de relações simples que possam ser utilizadas na prática da Engenharia Civil. Neste caso, a relação, também adimensional, decorre entre o momento torsor de cedência  $T_y$ , e os parâmetros relativos ao aço presente na laje, nomeadamente, a área de aço  $A_s$ , a altura útil  $d$  e o valor médio da tensão de cedência  $f_{sym}$ . Porém, na análise efectuada ao longo desta fase, não foi possível estabelecer e comprovar relações independentes. Ou seja, ao contrário do que foi feito com os parâmetros intervenientes na fissuração, aqui não se pôde definir uma relação de proporcionalidade entre o momento de cedência e cada um dos parâmetros.

Assim sendo, passou-se à definição de um parâmetro adimensional, um momento reduzido de cedência  $\mu_{Ty}$ , que englobasse a análise e as ilações obtidas nesta fase. Este momento reduzido surge para cumprir dois objectivos que são: ter um parâmetro que tornasse fácil e expedita a análise da cedência, em situação de projecto, numa laje submetida essencialmente a esforços de torção e reunir todos os intervenientes nesta fase, para tornar possível a análise e comprovação da relação entre o momento de cedência e o momento torsor resistente. O momento reduzido de cedência é expresso pela Equação (5.1):

$$\mu_{Ty} = \frac{T_y}{d \cdot A_s \cdot f_{sym}} \quad (5.1)$$

Onde  $T_y$  é o momento torsor de fissuração em kNm/m, para um elemento de largura  $b$ ,  $d$  é a altura útil da laje, em metros,  $A_s$  a área de aço na mesma largura de laje, em metros\*metros, e  $f_{sym}$  é o valor médio da tensão de cedência, em kPa.

Assim, com base no ajuste das curvas ANL às experimentais, foi possível avaliar os valores dos momentos de cedência  $T_y$ , as rotações unitárias  $\theta_y$  e os correspondentes momentos reduzidos  $\mu_{Ty}$  das Lajes ML, e ainda para as Lajes New3 e PF3 como complemento da análise. Na Tabela 5.3 apresentam-se os valores obtidos.

Tabela 5.3 – Momentos e rotações no ponto de cedência.

Laje	$d_{\text{médio}}$ [m]	$f_{\text{sym}}$ [Mpa]	$b_{\text{vigas}}$ [m]	$A_s$ [cm <sup>2</sup> /m]	$T_y$ [kNm]	$\theta_y$ [rad/m]	$\mu_{Ty}$ [ ]
ML2	0,175	551	0,28	10	69,6	0,0474	0,722
ML3	0,165	481	0,28	20	92,1	0,0506	0,580
ML6	0,165	551	0,28	10	70,9	0,0547	0,780
ML9	0,165	412	0,28	20	111,0	0,0525	0,816
New3	0,117	529	0,21	5	27,6	0,0403	0,886
PF3	0,123	542	0,35	5	28,9	0,0413	0,860

Analisando os valores obtidos para o momento reduzido de cedência, de forma geral, pode constatar-se que estão compreendidos entre 0,780 e 0,886, exceptuando os valores das Lajes ML2 e ML3. Os valores referentes a estas lajes foram descartados por se situarem bastantes abaixo dos outros valores da tabela, apresentando desvios de 13,6% e de 30,6%, respectivamente, em relação ao valor médio das restantes lajes. Ora, isto significa que a aproximação que se tentou fazer, explicada no subcapítulo 5.1.2, para se definir um ponto de cedência fictício que exprimisse o comportamento da laje caso esta tivesse tido uma rotura dúctil não foi suficiente. Assumindo que a aproximação do ponto de cedência não foi realista para estes dois casos específicos, explica-se assim o facto destes valores de momento reduzido de cedência serem, relativamente, mais baixos e descartados da análise do conjunto geral.

Calculando então a média dos valores de  $\mu_{Ty}$  somente das Lajes ML6, ML9, New3 e PF3, o valor é 0,836. Este valor pode ser tomado como referência numa situação em que se quer saber o valor do momento de torsor para o qual as armaduras presentes na laje entram em cedência. Esta análise é importante na medida em que, num caso de dimensionamento na prática, tendo este valor de referência e tendo o valor do momento torsor devido à carga actuante na laje, consegue-se saber qual a reserva de resistência que se tem desde a fissuração do betão até que as armaduras cedam.

## 5.4 Rotação unitária de cedência

A rotação unitária de cedência foi analisada à semelhança da análise da rotação unitária de fissuração. Ou seja, com o valor da rotação unitária de cedência obtido para as Lajes ML6, ML9, New3 e PF3, definiu-se uma relação entre a rotação e a altura das lajes. O objectivo é determinar uma relação constante entre a rotação e um parâmetro conhecido da laje. Após a análise do ponto de cedência, constatou-se que a altura  $h$ , e a rotação  $\theta_y$ , apresentavam uma proporcionalidade directa. Desta forma, é simples a proposta de uma equação a partir da qual se determina a rotação unitária de cedência de uma laje genérica, conhecendo apenas a altura correspondente. A Equação (5.2) permite o cálculo de  $\theta_y$  a partir do  $h$  da laje, da seguinte maneira:

$$\theta_y = 0,271 * h \quad (5.2)$$

A constante, de valor 0,271, da Equação (5.2) não é mais do que a média dos valores de  $\theta_y/h$  obtidos para as lajes acima mencionadas. A Tabela 5.4 reúne os resultados da análise da rotação unitária de cedência em função do  $h$ .

Tabela 5.4 – Rotação unitária de cedência

Laje	$h$ [m]	$\theta_y$ [rad/m]	$\theta_y/h$ [rad/m/m]
ML2	0,200	0,0474	0,237
ML3	0,200	0,0506	0,253
ML6	0,200	0,0547	0,273
ML9	0,200	0,0525	0,263
New3	0,149	0,0403	0,270
PF3	0,148	0,0413	0,278

As Lajes ML2 e ML3, nesta análise da rotação unitária, foram excluídas pelas mesmas razões que foram apresentadas no primeiro parágrafo deste Capítulo. Foram as lajes onde ocorreu rotura por punçoamento. Note-se que os valores da rotação para estas lajes é muito reduzido relativamente aos demais, repetindo-se o fenómeno ocorrido na análise do momento tórsor de cedência. Com as restantes lajes, pode ver-se que os valores são próximos uns dos outros, apresentando desvios, relativos ao valor da média, inferiores a 5%.

## 5.5 Ponto de carga máxima

Para a completa descrição da curva  $T-\theta$ , que caracteriza o comportamento à torção de uma laje de BA, é necessário caracterizar o ponto de carga máxima, referente ao momento torsor máximo  $T_{max}$ , e à rotação unitária máxima  $\theta_{max}$ . A análise consistiu no estabelecimento de uma relação entre o ponto de cedência e o ponto de carga máxima, uma vez que a cedência já foi tratada no Subcapítulo anterior.

Para esta fase importava ter resultados experimentais de lajes cujas roturas tenham sido dúcteis para que fosse possível, no diagrama  $P-d$ , a clara distinção entre o ponto de cedência e o ponto de carga máxima, para daí se tirarem as relações entre o momento de cedência e o momento máximo e as respectivas rotações unitárias. As Lajes M2, M3, M6 e M7, assim como as Lajes New 3, PF2 e Old3 apresentaram diagramas de carga-deslocamento onde o patamar de plastificação era visualmente perceptível. Feito o ajuste, referido no Subcapítulo 5.1, foi possível analisar a relação que se poderia estabelecer entre o comportamento da laje em relação à cedência e o comportamento à rotura. Constatou-se que existe, de facto, uma relação de proporcionalidade directa entre o momento de cedência e o momento máximo. Da Tabela 5.5 pode ver-se que os valores, do quociente  $T_{max}/T_y$ , obtidos para cada uma das lajes, são muito próximos uns dos outros e andam em torno da unidade.

Tabela 5.5 – Momento torsor de cedência e momento torsor máximo.

Laje	$T_y$ [kNm/m]	$T_{max}$ [kNm/m]	$T_{max}/T_y$ [ ]
M1	5,48	5,61	1,02
M2	7,48	8,01	1,07
M3	8,25	8,72	1,06
M6	7,37	7,86	1,07
M7	7,75	8,24	1,06
New3	10,10	10,81	1,07
PF2	9,00	9,50	1,05
Old3	9,58	10,00	1,04

O valor médio obtido para o quociente  $T_{max}/T_y$  foi de 1,06. Este valor é proposto, então, como um valor de referência para a definição do momento máximo em função do momento de cedência. De facto, o ponto de carga máxima assume um papel menos importante que o ponto de fissuração e o ponto de cedência, uma vez que o dimensionamento tem por limite a

cedência das armaduras. Deste modo, a caracterização da fase de plastificação até à rotura poderá ser definida de forma aproximada como aqui se propõe.

Passa-se agora à definição da rotação unitária máxima, que à semelhança do que se constatou para o momento torsor máximo, também apresenta proporcionalidade directa com a rotação unitária de cedência. Seguindo a mesma metodologia utilizada na análise do momento máximo, obtiveram-se resultados de  $\theta_{max}/\theta_y$  para cada uma das lajes, acima referidas. Com estes valores, e seguindo a mesma lógica usada explicitada no parágrafo anterior, determinou-se o valor da média e propõe-se que este seja tido como referência na determinação da rotação unitária máxima. Na Tabela 5.6 Mostram-se os resultados obtidos para cada laje.

Tabela 5.6 – Rotação unitária de cedência e rotação unitária máxima.

Laje	$\theta_y$ [rad/m]	$\theta_{max}$ [rad/m]	$\theta_{max}/\theta_y$ [ ]
M1	0,033	0,038	1,14
M2	0,045	0,061	1,35
M3	0,042	0,050	1,21
M6	0,041	0,051	1,25
M7	0,041	0,051	1,25
New3	0,041	0,063	1,54
PF2	0,043	0,064	1,51
Old3	0,046	0,066	1,46

De forma geral, pode ver-se que os valores de  $\theta_{max}/\theta_y$  estão compreendidos entre 1,21 e 1,54, exceptuando a Laje M1. Esta laje foi excluída da análise e do cálculo da média por apresentar um valor muito baixo em relação aos restantes. Isto deve-se ao facto desta laje apresentar uma rotura com um patamar de plastificação relativamente pequeno. Assim, embora na análise da relação entre o momento de cedência e o momento máximo tenha sido contemplada esta laje por ter tido um resultado aceitável, nesta análise da rotação unitária é excluída devido ao patamar de plastificação que não é idêntico ao das outras lajes, inviabilizando a sua contabilização e comparação com os restantes resultados. O valor proposto como referência para a relação  $\theta_{max}/\theta_y$ , que mais não é do que a média dos resultados, à excepção da Laje M1, é igual a 1,37. Assim, a Equação (5.3) resume a análise feita para a definição da rotação unitária máxima.

$$\theta_{max} = 1,37 * \theta_y \quad (5.3)$$



## 6 CONCLUSÃO

Neste Capítulo, apresentam-se as principais conclusões retiradas deste trabalho, tendo em conta os objectivos propostos para o desenvolvimento do mesmo, e um conjunto de sugestões para trabalhos a serem desenvolvidos, futuramente, sobre este tema.

Esta tese teve como objectivo primordial a caracterização do comportamento não linear de lajes de BA solicitadas à torção. O objectivo foi alcançado, tendo sido apresentados resultados que culminaram na proposta de equações gerais que resumem as análises teóricas realizadas. Nesse sentido, ao longo do presente trabalho, foram referidas algumas conclusões. As mais importantes são resumidas de seguida.

### 6.1 Principais conclusões

A curva torção-rotação permite caracterizar o comportamento à torção de elementos de viga utilizados na modelação de lajes. Esta curva, simétrica, é subdividida em três fases: a fase elástica, a de fissuração e a de plastificação.

Para a caracterização da fase inicial, a fase linear elástica não fissurada, que tem como limite o ponto de fissuração, verificou-se ser somente o betão, geometria e resistência, os intervenientes no comportamento à torção. Assim, o ponto de fissuração ficou definido pelo momento torsor  $T_{cr}$  e pela rotação  $\theta_{cr}$  correspondentes. O momento torsor é avaliado pelo momento torsor reduzido de fissuração, avaliado em  $\mu_{T_{cr}}=0,71$ , pelos parâmetros geométricos  $b$  e  $h$ , e pelo valor da resistência à tracção, do betão. Por sua vez, o produto da rotação pela altura da laje assume também um valor constante de  $\theta_{cr}*h=1,69*10^{-4}$ .

Para além disso, foi ainda possível confirmar que ao ponto de fissuração corresponde uma dada extensão do betão traccionado, avaliado em  $\varepsilon_{cr}=0,104\%$ . Foi ainda possível verificar diversos tipos de proporcionalidade: em primeiro lugar entre  $T_{cr}$  e a largura  $b$ ; depois entre  $T_{cr}$  e o quadrado da altura  $h^2$ ; em terceiro lugar entre  $T_{cr}$  e o produto  $(b*h^2*f_{ctm})$ .

A segunda fase do comportamento, a fase não linear de desenvolvimento de fissuras, decorre entre os pontos de fissuração e de cedência. Para o efeito, resta caracterizar o ponto de cedência que limita esta fase. A hipótese fundamental foi de que somente o aço e as suas características, controlam o desenvolvimento da segunda fase até à cedência. Assim, conseguiu-se definir um momento reduzido de cedência, o qual assume valores constantes,

resumindo assim a relação entre o momento torsor de cedência e os parâmetros do aço. A rotação unitária de cedência ficou definida através do valor constante do produto  $\theta^*h$ .

Contudo, nesta fase, não foi possível a definição de relações independentes de proporcionalidade entre o momento e cada um dos parâmetros enunciados.

A fase de plastificação, definida entre os pontos de cedência e de carga máxima, necessita da clarificação do ponto de carga máxima. Na ausência de um número necessário de resultados experimentais credíveis a este nível, optou-se por uma relação entre o ponto de carga máxima e o ponto de cedência. Com isso, ficou definido o ponto de carga máxima através da proporção entre o momento torsor de cedência e o momento torsor máximo, assim como a proporção entre as respectivas rotações unitárias.

## 6.2 Trabalhos Futuros e Recomendações

Ao longo do desenvolvimento deste trabalho surgiram algumas questões e aspectos que, na impossibilidade de os abordar e resolver por, ultrapassarem o âmbito desta tese, passam a sugestões para desenvolvimentos futuros:

Um aspecto importante a ser desenvolvido futuramente é o da realização de ensaios experimentais onde se varie a classe do betão, de forma a se terem variações do valor médio da tensão de rotura à tracção do betão  $f_{ctm}$ . A falta de resultados experimentais, onde se tenha variado a altura das lajes ensaiadas, também constituiu uma dificuldade para a realização deste trabalho.

A variação das características geométricas e mecânicas do aço das armaduras também constitui um aspecto a ser levado em conta, futuramente, na realização de ensaios experimentais. Neste trabalho não se efectuou a análise de lajes onde a armadura difira da face superior para a face inferior ou mesmo no caso de a armadura ser diferente entre uma direcção e outra. Isto, devido à falta de resultados experimentais disponíveis que viabilizassem a análise teórica, servindo de termo de referência.

Um outro aspecto, que surge como sugestão, é o da avaliação teórica do comportamento à torção de lajes de BA submetidas à torção conjuntamente com a flexão. Os dados experimentais, sobre os quais este trabalho assentou, foram obtidos de ensaios onde a solicitação era de torção pura. Daí que esta avaliação teórica tenha abrangido somente o fenómeno da torção. A combinação destes dois fenómenos, a flexão e a torção, em lajes de BA, constitui um tema a ser explorado no futuro.

Por se ter caracterizado, ao longo deste trabalho, o comportamento à torção apenas de lajes maciças de BA, surge a possibilidade de também, no futuro, se pensar na avaliação teórica do comportamento de lajes aligeiradas relativamente ao fenómeno da torção.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Azevedo, A. (2003). "Método dos Elementos Finitos" (1ª ed.). Faculdade de Engenharia do Porto, Portugal.
- Barros, H., & Figueiras, J. (2010). "Tabelas e Ábacos de Dimensionamento de secções de Betão Solicitadas à Flexão e a Esforços Axiais segundo o Eurocódigo 2". Porto: Edições FEUP.
- Beeby, A., & Nayaranan, R. S. (2005). "Designers' Guide to EN1992-1-1 and EN1992-1-2". Londres: Thomas Telford.
- Bernardo, L. (2003). "Torção em Vigas em Caixão de Betão de Alta Resistência". Tese de Doutoramento, Departamento de Engenharia Civil da Universidade de Coimbra, Coimbra.
- Castro, L. (2001). "Elementos Finitos para a Análise Elástica de Lajes". Obtido em Março de 2013, de <http://www.civil.ist.utl.pt/~luis/textos/lajeseef.pdf>
- CEN. (2004). "Eurocódigo 2: Projecto de estruturas de betão - Parte 1-1: Regras gerais e regras para edifícios". Bruxelas: Comité Europeu de Normalização.
- Computers and Structures Inc. (Abril de 2009). SAP 2000 Basic Analysis Reference Manual. 14. California, USA.
- Dias da Silva, V. (2004). "Mecânica e Resistência dos Materiais". Coimbra: ZUARI - Edição de Livros Técnicos, Lda.
- Ferreira, P. (2011). "Fendilhação de Lajes de Betão Armado submetidas à Torção". Coimbra: DEC - FCTUC.
- Gonçalves, P. (2010). "Análise Experimental de Deformações em Lajes de Betão Armado". Tese de mestrado, Coimbra: DEC - FCTUC.
- Hsu, T. (1984). "Torsion of Reinforced Concrete". New York: Van Nostrand Reinhold.
- Leonhardt, F., & Mönig, E. (1979). "Construções de Concreto" (Vol. IV). Rio de Janeiro: Editora Interciência.

- Lopes, A. V. (2005). "Simulação numérica 2D da rotura de uma viga de betão armado". Simpósio Ibero-Americano "o Betão nas Estruturas" - SIABE05 (pp. 391-398). Coimbra: Universidade de Coimbra.
- Lopes, A., & Lopes, S. (Abril de 2012). "Importance of a rigorous evaluation of the cracking moment in RC beams and slabs". (Techno-Press, Ed.) Computers and Concrete, Vol. 9(4), pp. 275-291.
- Marti, P., & Kong, K. (1987). "Response of Reinforced Concrete Slab Elements to Torsion". Journal of Structural Engineering, Vol. 113, Issue 5, pp. 976-993.
- Marti, P., Leesti, P., & Khalifa, W. (1987). "Torsion tests on Reinforced Concrete Slab Elements". ASCE - Journal of Structural Engineering, Vol. 113, Issue 5, pp. 994-1010.
- Martins, M. (2012). "Resistência ao Punçoamento de Bordos de lajes de Betão Armado". Coimbra: DEC - FCTUC.
- Menoita, R. (2010). "Resistência de Lajes de Betão Armado - Efeito do Tipo de Armadura". Coimbra: DEC - FCTUC.
- Montoya, P., Meseguer, A., & Cabré, F. (2001). "Hormigón Armado" (14ª ed.). Barcelona: Gustavo Gili.
- Oñate, E. (1992). "Cálculo de Estructuras por el método de Elementos Finitos - Análisis Estático lineal" (1º ed., Vol. I). Barcelona: CIMNE.
- Pereira, O. (2003). "Integração Numérica e Locking". Obtido em Março de 2013, de <http://www.civil.ist.utl.pt/ae2/INLOCK.pdf>
- Pontes, A. S. (2009). "Avaliação de Deformações em Lajes de Betão Armado". Coimbra: DEC - FCTUC.
- Ribeiro, B. (2008). "Avaliação de Deformações em Estruturas de Betão Armado". Coimbra: DEC - FCTUC.
- Rodrigues, P. (2011). "Análise Experimental da Resistência à Torção em Lajes de Betão Armado". Coimbra: DEC - FCTUC.